TD 29 – Applications Linéaires (Correction)

1 Linéarité d'une application

Exercice 1 – Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont des endomorphismes ? des formes linéaires ?

a) $f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,-x+3y) \end{array}$

b) $f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} \end{array}$

c) $f_3: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}$

d) $f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$

Exercice 2 – Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

a) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2z, y, 1) \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^3 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (P,Q) & \longmapsto & PQ \end{array}$

Exercice 3 – Représentation via une base. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $u((1,0,0)) = (1,-1,2)$, $u((0,1,0)) = (-3,2,-1)$ et $u((0,0,1)) = (-7,4,1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u.

   On a,
   $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad u(x,y,z) = (x-3y-7z, -x+2y+4z, 2x-y+z)$$

2. Déterminer les éventuels antécédents de $(-1,1,8)$ par u.

   On montre que $(-1,1,8)$ n'admet aucun antécédent en résolvant le système associé.

3. L'application u est-elle surjective?

   Comme $(-1,1,8) \in \mathbb{R}^3$ n'admet aucun antécédent par u, l'application u n'est pas injective.

4. Démontrer «à la main» que l'application u n'est pas injective.

   On remarque que
   $$f(0,0,0) = f(2,3,-1) = (0,0,0)$$
   alors que $(0,0,0) \neq (2,3,-1)$. Donc f n'est pas injective.

Exercice 4 – Représentation via une base. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini sur la base canonique par : $\Phi(1) = 1$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\Phi(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$. Calculer $\Phi(P)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$

On montre que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \qquad \Phi(P) = (X-1)P' + P$$

2 Noyau, image

Exercice 5 – Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes et en donner une base. Les applications sont-elles injectives ?

a) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, x+y) \end{array}$

On peut montrer que $\ker(f_1) = \{(0,0)\}$. Donc f_1 est injective.

b) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$

On peut montrer que $\ker(f_2) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$. Donc f_2 n'est pas injective.

c) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (P', P(0)) \end{array}$

On peut montrer que $\ker(f_3) = \{0\}$. Donc f_3 est injective.

d) $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' - 2f \end{array}$

On peut montrer que $\ker(f_4) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{2x})$. Donc f_4 n'est pas injective.

Exercice 6 – Déterminer l'image des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, x-y+z, 3x-7y+3z) \end{array}$

On peut montrer que $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}((1,1,3),(-2,-1,-7))$. Donc f_1 n'est pas surjective.

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0),P'(0),P''(0),P'''(0)) \end{array}$

On a,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_2) &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,2,0),(0,0,0,6)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)) \\ &= \mathbb{R}_4[X] \end{aligned}$$

Donc f_2 est surjective.

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

On a,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_3) &= \mathrm{Vect}\left((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &\neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{(problème de dimension par exemple)} \end{aligned}$$

Donc f_3 n'est pas surjective.

Exercice 7 – On note E l'espace vectoriel des suites réelles. Soit Δ l'application définie pour toute suite (u_n) de E par $\Delta(u_n) = (v_n)$, où (v_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta)$. L'application Δ est-elle injective?

   On peut montrer que $\ker(\Delta)$ est l'ensemble des suites constantes. L'application Δ n'est donc pas injective.

3. Montrer que Δ est surjective.

   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Alors,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Delta(u_n) = u_{n+1} - u_n = v_n$$

   Donc,

   $$\Delta(u_n) = (v_n)$$

   Ainsi, toute suite admet au moins un antécédent par la fonction Δ. L'application Δ est surjective.

4. (a) Calculer Δ^2.

      Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2(u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$

   (b) Ecrire $\ker(\Delta^2)$ sous forme d'un Vect.

      On peut montrer que

      $$\ker(\Delta^2) = \mathrm{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}})$$

5. Soit F l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_0 = 0$. Montrer que $E = F \oplus \ker(\Delta)$.

3 Théorème du rang

Exercice 8 – On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension de l'image de f.
4. En déduire une base de l'image de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1. Suivre la méthode...
2. $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1,1))$ et $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1
3. $\text{Im}(f)$ est de dimension 2
4. Une base de $\text{Im}(f)$ est $((2,-1,-1),(-1,2,-1))$
5. L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 9 – On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de l'image de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension du noyau de f.
4. En déduire une base du noyau de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1. Suivre la méthode...
2. Base de l'image : $((1,-1,0,1),(0,1,1,1))$ donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2
3. Le noyau est donc de dimension 1.
4. Base du noyau : $((-1,-1,1))$
5. L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 10 – Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$; $P \longmapsto X(P' - P'(0))$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de l'image de φ.

   On a,

   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3) = \mathrm{Vect}(0, 0, 2X^2, 3X^3) = \mathrm{Vect}(X^2, X^3)$$

3. Déterminer le rang de φ.

   Le rang de φ (dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$) est 2.

4. Quelle est la dimension du noyau? En déduire une base du noyau.

   D'après le théorème du rang,

   $$\dim(\ker\varphi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 4 - 2 = 2$$

   On peut remarquer que $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$ d'où

   $$\ker\varphi = \mathrm{Vect}(1, X)$$

Exercice 11 – Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

1. Déterminer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, l'expression de $f(x,y,z)$.

   On a,
   $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 0)$$

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   D'après le théorème du rang, on sait déjà que
   $$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$
   Il ne reste plus qu'à montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ ou que $\ker + \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ (il suffit de montrer seulement l'une des deux propriétés). Pour montrer ça, on peut commencer par démontrer que
   $$\ker f = \mathrm{Vect}((-3,2,1))$$
   et que
   $$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,2,0))$$

Exercice 12 – Soit $n \geq 2$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $f(P) = P + (1-X)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P_k = (X-1)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Justifier que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.

   La famille $(P_0, \dots, P_n)$
   - est une famille libre (car degrés échelonnés)
   - qui contient autant d'éléments que la dimension de E

   c'est donc une base de E.

3. Déterminer $f(P_k)$ pour $k = 0, \dots, n$ et en déduire $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en précisant une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

   On peut commencer par calculer que

   $$\forall k = 0, \dots, n, \qquad f(P_k) = (1-k)(X-1)^k$$

   Comme la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E, on a,

   $$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)) \\ &= \text{Vect}(1, 0, -(X-1)^2, -2(X-1)^3, \dots, (1-n)(X-1)^n) \\ &= \text{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, \dots, (X-1)^n)\end{aligned}$$

   Comme $\dim(\text{Im}\, f) = n$, par théorème du rang, $\dim(\ker f) = 1$. Or, on remarque que $f(X-1) = 0$ d'où

   $$\ker(f) = \text{Vect}(X-1)$$

Exercice 13 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad u(P) = (P(2), P(3))$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$. L'application u est-elle injective, surjective, bijective ?

   On a,
   $$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(1), u(X)) = \operatorname{Vect}((1,1),(2,3))$$
   Donc $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2. Par théorème du rang, on en déduit que $\ker u$ est de dimension 0 d'où
   $$\ker(u) = \{0\}$$
   L'application est injective et on a la même dimension finie au départ et à l'arrivée, elle est donc bijective.

2. Même question pour $n = 2$ puis $n = 3$.

   Cas $n = 2$. On a,

   $$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \operatorname{Vect}((1,1),(2,3),(4,6)) == \operatorname{Vect}((1,1),(2,3)) = \mathbb{R}^2$$

   Donc $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2. Par théorème du rang, on en déduit que $\ker u$ est de dimension 1 et puis que

   $$\ker(u) = \operatorname{Vect}((X-2)(X-3)) \neq \{0\}$$

   L'application est surjective, non injective.

   Cas $n = 3$. On a,

   $$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \operatorname{Vect}((1,1),(2,3),(4,6),(8,27)) == \operatorname{Vect}((1,1),(2,3)) = \mathbb{R}^2$$

   Donc $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2. Par théorème du rang, on en déduit que $\ker u$ est de dimension 2 et puis que

   $$\ker(u) = \operatorname{Vect}((X-2)(X-3), X(X-2)(X-3)) \neq \{0\}$$

   L'application est surjective, non injective.

Exercice 14 – On considère $\mathbb{C} = \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ z \longmapsto (1+i)z+(1-i)\bar{z}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

- Pour le noyau, on peut revenir à la forme algébrique $z = a+ib$:

$$\varphi(a+ib) = \frac{a}{2} + \frac{ib}{2} + \frac{ia}{2} + \frac{b}{2}$$

Ainsi,

$$\varphi(a+ib) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a+b = 0$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1-i)$$

- Pour l'image, on calcule simplement les images des deux vecteurs de la base canonique : $\varphi(1) = \dfrac{1+i}{2}$, et $\varphi(i) = \dfrac{i+1}{2}$. On a donc

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1+i)$$

L'image et le noyau sont tous deux de dimension 1.

4 Opérations sur les applications linéaires

Exercice 15 – Soient f et g les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) = (x-y, x+y)$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ g(x,y) = (2x-3y, 2y)$$

Donner l'expression de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

On a,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (f \circ g)(x,y) = (2x-5y, 2x-y)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (g \circ g)(x,y) = (-x-5y, 2x+2y)$$

Exercice 16 – Soient $n \in \mathbb{N}$ et u et v les applications définies pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par

$$u(P) = -nP + 2XP' \quad \text{et} \quad v(P) = nXP - X^2P'$$

1. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que $u \circ v - v \circ u = 2v$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u \circ v^p - v^p \circ u = 2pv^p$.

5 Isomorphismes

Exercice 17 – On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x-y+z, x+y) \end{array}$$

Montrer que cette application linéaire est un automorphisme.

- On peut montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$
- L'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension finie.

Donc f est bijective.

Exercice 18 – Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les vecteurs $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,-1)$ et $f_3 = (1,-1,1)$. On considère u l'application définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad u(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, x-y+z)$$

1. Montrer que $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On peut montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre (via la définition) et elle contient autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et en déduire sans calcul $\mathrm{Ker}(u)$.

   On a,
   $$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}^3$$
   (la dernière égalité provient du fait que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$). Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ et puis par théorème du rang $\dim \ker f = 0$ et donc,
   $$\ker f = \{(0,0,0)\}$$

4. Justifier que u est un isomorphisme.

   Comme $\ker f = \{(0,0,0)\}$, u est injective. De plus, c'est une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, elle est donc à fortiori bijective.

5. Déterminer l'expression de u^2. En déduire une relation entre u, u^2 et id.

   On peut montrer que
   $$u^2 = u + 2\mathrm{id}$$

6. En déduire l'expression de u^{-1} en fonction de u et id.

   On en déduit que
   $$u\frac{1}{2}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{id}$$
   Donc, u est inversible et
   $$u^{-1} = \frac{1}{2}(u - \mathrm{id})$$

Exercice 19 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2+1)P' - (2X-\alpha)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On suppose $\alpha = 0$. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   On peut montrer que
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(-2X, 1-X^2, 2X) = \mathrm{Vect}(X; 1-X^2)$$
   et aussi que
   $$\ker(f) = \mathrm{Vect}(1+X^2)$$
   Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   - D'après le théorème du rang, on sait déjà que
   $$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\ker f)$$
   - Montrons que $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathbb{R}_2[X]$. On a,
   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f + \ker f &= \mathrm{Vect}(X; 1-X^2) + \mathrm{Vect}(1+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(X, 1-X^2, 1+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

3. Pour $\alpha \neq 0$, montrer que φ est un automorphisme.

Exercice 20 – On considère $\mathbb{C} = \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit a un nombre complexe fixé. On définit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $z \longmapsto z + a\bar{z}$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. En notant $z = x+iy$, et $a = b+ic$, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 0 = x+iy+(b+ic)(x-iy) = x+bx+cy+i(y+cx-by) \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+b)x = cy \\ (1-b)y = cx \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cela implique (en multipliant par la première ligne par c puis en substituant) $(1-b^2)y = c^2 y$, soit $(1-b^2-c^2)y = 0$.

- Si a n'est pas de module 1 (c'est-à-dire $b^2+c^2 \neq 1$), on trouve $y = 0$, puis $(1+b)x = cx = 0$. On a déjà exclu la possibilité $1+b = c = 0$ (qui correspond au nombre $a = -1$ qui est de module 1), donc dans ce cas, on obtient $x = 0$ puis

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

  et l'application est injective (et même bijective car les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie et que f est linéaire).
- Dans le cas très particulier où $a = -1$, le système se résume à $2y = 0$, soit $y = 0$, et $\mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}$ (l'application n'est pas injective alors pas bijective).
- Si a est de module 1 (et différent de -1), on doit avoir

$$x = \frac{c}{1+b} y$$

  Dans ce cas, la deuxième équation est automatiquement vérifiée. Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\frac{c}{1+b} + i\right)$$

  (L'application n'est pas injective alors pas bijective).

6 Exercices plus théoriques

Exercice 21 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$.

1. Montrer que $f \in GL(E)$.
2. Soient $F = \ker(f - 3Id_E)$ et $G = \ker(f - 2Id_E)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 22 – Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. L'application linéaire f est-elle un automorphisme?

   Comme f est un endomorphisme, cela revient à se demander si f est bijective. Supposons par l'absurde que f est inversible. Alors f admet une bijection réciproque notée f^{-1}. Or,

   $$f \circ f \circ f = 0$$

   Donc en composant à droite par f^{-1}, on obtient,

   $$f \circ f = 0$$

   Ce qui est absurde. Donc f n'est pas bijective donc f n'est pas un automorphisme.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

   Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

   - Montrons que la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

     $$\lambda_1 x_0 + \lambda_2 f(x_0) + \lambda_3 f^2(x_0) = 0$$

     Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En composant l'égalité par f^2, comme f est linéaire on obtient,

     $$\lambda_1 f^2(x_0) + \lambda_2 f^3(x_0) + \lambda_3 f^4(x_0) = 0$$

     Or $f^3 = 0$ (et donc $f^4 = 0$). Donc,

     $$\lambda_1 f^2(x_0) = 0$$

     Or $f^2(x_0) \neq 0_E$. Donc $\lambda_1 = 0$. On montre de même que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   - La famille contient autant d'éléments que la dimension de E.

   Donc, $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

Exercice 23 – Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.
3. En déduire que si u est un endomorphisme de E alors $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

Exercice 24 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$.
3. Rappeler le théorème du rang et en déduire que $\dim(E) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E))$.
4. Rappeler la formule de Grassmann et montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) \leq \dim(E)$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E$.