

**COLLES 27 & 28 - Du 11/05 au 15/05 & du 18/05 au 22/05**

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

**Chapitre 27 - Bases et dimension**

- Rappel : notion de famille génératrice d'un espace vectoriel
- Notion de famille libre/liée. Cas particuliers : famille à un vecteur, famille à deux vecteurs, famille de polynômes de degrés échelonnés.
- Notion de base d'un espace vectoriel, notion de coordonnées d'un vecteur dans une base, bases canoniques des espaces vectoriels usuels
- Notion de dimension, dimension des espaces vectoriels usuels, caractérisation des bases en dimension finie
- Comportement de la dimension avec l'inclusion, comportement de la dimension avec la somme de sev (formule de Grassmann)
- Savoir déterminer un supplémentaire d'un espace, caractérisation de deux espaces supplémentaires grâce à la dimension
- Rang d'une famille

**Chapitre 28 - Développement Limités**

- Définition d'un DL en  $a$  à l'ordre  $n$
- Quelques propriétés sur les DL : troncature d'un DL, unicité des coefficients d'un DL, lien avec la parité de la fonction
- Formule de Taylor-Young
- Développement limités usuels à connaître
- Opérations sur les DL : substitution, primitivation, combinaison linéaire, produit, inverse, quotient, composition, DL ailleurs que 0 par changement de variables
- Application des DL : déterminer une limite, position relative courbe/tangente, position relative courbe/asymptote, étude des extrema locaux

## Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

### Un énoncé :

- Donner la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel (Chap 27 - Définition 1.1)
  - Donner la définition d'une famille libre (Chap 27 - Définition 1.7)
  - Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel (Chap 27 - Définition 1.20)
- 
- Donner la formule de Taylor Young (Chap 28 - Théorème 3.1)
  - Donner le DL à tout ordre en 0 des fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$  (Chap 28 - Section 3.1)
  - Donner le DL à tout ordre en 0 des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  (Chap 28 - Section 3.1)

### Un exercice :

- Montrer que la famille  $(\sin, \cos)$  est libre dans  $C^1(\mathbb{R})$ . (Chap 27 - Exemple 1.9)
- Déterminer une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  donné par

$$F = \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (3, -2))$$

- Soient  $P_1 = (X-1)(X-2)(X-3)$ ,  $P_2 = X(X-2)(X-3)$ ,  $P_3 = X(X-1)(X-3)$  et  $P_4 = X(X-1)(X-2)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ . (Chap 27 - Exemple 1.21)
- 
- Trouver le développement limité de  $x \mapsto (1 - \cos(x)) \sin(x)$  à l'ordre 6. (Chap 28 - Exemple 3.13)
  - Faire le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2+x+x^2}$ . (Chap 28 - Exemple 3.17)
  - Déterminer la position relative du sinus et de sa tangente en 0. Faire une illustration graphique. (Chap 28 - Exemple 4.7)