30. Variables Aléatoires Finies

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé : Ω est un **univers**, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des **évènements** et $\mathbb{P}$ est une **probabilité** sur l'univers Ω.

1 Loi d'une variable aléatoire

Souvent dans une expérience aléatoire, on ne s'intéresse pas à tous les résultats possibles mais seulement à un aspect particulier de l'expérience. Par exemple, lorsque l'on lance deux dés successivement, on peut s'intéresser uniquement à la somme des deux dés obtenue. On introduit alors les variables aléatoires.

1.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1.1 Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et E un ensemble. Soit A une partie de E. On appelle **variable aléatoire** sur Ω à valeurs dans E toute application X de Ω dans E :

$$X : \Omega \longrightarrow E \; ; \; \omega \longmapsto X(\omega)$$

Dans la plupart des situations, $E = \mathbb{R}$ et on appelle X une **variable aléatoire réelle**. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X :

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

Une variable aléatoire réelle est une observation numérique sur les résultats d'une expérience aléatoire. Elle n'a en elle-même rien d'aléatoire, et ce n'est pas une variable, mais une application.

Définition 1.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On définit les évènements suivants :
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X = k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} = X^{-1}(\{k\})$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant k\} = X^{-1}(]-\infty, k])$.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$.

On définit de même les événements $\{X < k\}$, $\{X \geq k\}$, $\{X > k\}$, $\{X \neq k\}$. (Les crochets peuvent être remplacés par des accolades ou des parenthèses.)

Exemple 1.3 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in [\![1, 3]\!]$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer".

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.4 Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On appelle **loi** de X l'application

$$P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]\ ;\ A \longmapsto P(X \in A)$$

L'application P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Ainsi, à partir d'une probabilité P sur Ω, on définit donc une nouvelle probabilité P_X sur l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs de X.

Proposition 1.5 Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). La loi P_X de X est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$,

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

De manière concrète, la **loi de X** est la donnée de

- l'ensemble $X(\Omega)$ correspondant à l'ensemble des valeurs prises par X,
- et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

On ne demande pas de calculer $P(X \in A)$ pour toute partie A de $X(\Omega)$, mais uniquement pour les évènements élémentaires. La loi de X peut être représentée par un tableau de la forme suivante :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	$P(X = x_n)$

On pensera à vérifier que la somme des probabilités de ce tableau vaut 1.

Exemple 1.6 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. Donner la loi de X.

Définition 1.7 Soient (Ω_1, P_1) et (Ω_2, P_2) deux espaces probabilisés finis. Soient X une variable aléatoire définie sur Ω_1 et Y une variable aléatoire définie sur Ω_2. On dit que X et Y **ont la même loi** si $P_X = P_Y$. On note $X \sim Y$. Autrement dit,

- X et Y prennent les mêmes valeurs $(X(\Omega_1) = Y(\Omega_2))$
- avec les mêmes probabilités : pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = P(Y = x)$.

! Ne pas confondre l'égalité (ponctuelle) des variables aléatoires et leur égalité en loi. Par exemple, si on lance deux dés et qu'on note X_1 (respectivement X_2) le résultat du premier (resp. du second) lancer), alors il est clair que X_1 et X_2 suivent la même loi (loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$). En revanche, les variables X_1 et X_2 ne sont pas égales : le résultat du premier dé n'est pas toujours le même que celui du second dé (l'un des deux dés peut par exemple donner un 1 alors que l'autre donne un 6). On a donc,

$$X_1 \sim X_2 \qquad \text{mais} \qquad X_1 \neq X_2$$

1.3 Loi conditionnelle d'une variable aléatoire

Définition 1.8 Soit X une variable aléatoire sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) > 0$. On appelle **loi conditionnelle de** X **sachant** A la loi de X pour la probabilité P_A, i.e. l'application

$$\mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]\ ;\ B \longmapsto P_A(X \in B)$$

La loi conditionnelle de X sachant A est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P_A(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exemple 1.9 On dispose d'une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 indiscernables au toucher. On lance une pièce. Si on obtient « pile », on rajoute une boule numérotée 1 dans l'urne, et si on obtient « face » on y rajoute une boule numérotée 2. Puis on tire une boule dans l'urne. On note F l'événement « le lancer de la pièce a donné face ». Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant F et la loi conditionnelle de X sachant P. En déduire la loi de X.

1.4 Transformation d'une variable aléatoire

Proposition 1.10 Soient X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $f(X) : \Omega \longrightarrow F$; $\omega \longmapsto f(X(\omega))$ définit une variable aléatoire $f(X)$ sur Ω. La variable aléatoire $f(X)$ est à valeurs dans $f(X(\Omega))$. La loi $P_{f(X)}$ de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et par la loi de X :

$$P_{f(X)}(A) = P(f(X) \in A)$$

Exemple 1.11 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Donner la loi de $V = U^2$.

Proposition 1.12 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

2 Moments d'une variable aléatoire

2.1 Espérance

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω. On appelle **espérance** de X le réel suivant, noté $\mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

L'espérance représente la *moyenne* de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire. C'est un **indicateur de position**.

Ci-dessous, on donne une deuxième expression de l'espérance qui *sert peu en pratique*, mais est utile pour les démonstrations.

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). Alors

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

Proposition 2.3 Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P). Alors

- Linéarité : Pour tous réels a, b, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Positivité : Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$
- Croissance : Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.
- Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$
- Espérance d'une constante : Si $X = m$ est une variable aléatoire constante, alors $E(X) = m$.
- Espérance d'une indicatrice : $E(1_A) = P(A)$

Exemple 2.4 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que U admet une espérance et la calculer.

Exemple 2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2k}{n + n^2}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Définition 2.6 On dit qu'une variable aléatoire X est **centrée** si $E(X) = 0$.

? Si X est une variable aléatoire alors $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée. En effet,

Exemple 2.7 On lance un dé équilibré à 6 faces. On note X le numéro obtenu et $Y = 2X + 3$. Calculer l'espérance de Y.

Proposition 2.8 — Théorème de transfert. Soient X une variable aléatoire finie et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans déterminer sa loi.

Exemple 2.9 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que $V = U^2$ admet une espérance et la calculer.

Exemple 2.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2k}{n+n^2}$$

Montrer que $Y = X^2$ admet une espérance et la calculer.

2.2 Variance

Une même espérance peut s'obtenir de façons très différentes : un tas de copies aléatoires peut avoir 10 de moyenne si tout le monde a 10, ou si la moitié de la classe obtient 20 et l'autre moitié 0. La répartition des notes n'est pourtant pas du tout la même et l'espérance ne reflète pas cette différence. La variance va permettre de repérer la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

Définition 2.11 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω. On appelle **variance** de X le réel suivant, noté $V(X)$,

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La variance et l'écart-type mesurent l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance, ce sont des mesures de *dispersion*.

En pratique, on utilise la formule suivante pour calculer la variance.

Proposition 2.12 — Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle finie. On a

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire finie sur Ω et notons $m = \mathbb{E}(X)$. On a,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] && \text{par définition de la variance}\\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2mX + m^2\right] && \text{en développant}\\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2mX] + \mathbb{E}[m^2] && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + m^2\mathbb{E}[1] && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2m^2 + m^2 && \text{car } \mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{E}(1) = 1\\
&= \mathbb{E}[X^2] - m^2\\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.13 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Montrer que U admet une variance et la calculer.

Proposition 2.14 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une variance.

1. Alors $V(X) \geqslant 0$.
2. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $Y=aX+b$ admet une variance et $V(aX+b)=a^2V(X)$.
3. Lorsque $V(X)=1$, X est dite réduite.

Démonstration.

1. D'après la formule de transfert, on a donc

$$V(X)=\sum_{k\in X(\Omega)}(k-E(X))^2P(X=k)\geq 0$$

2. On a

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) \\ &= E(X^2-2XE(X)+E(X)^2) \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+E(E(X^2)) \\ &= E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2) \\ &= E(X^2)-E(X)^2 \end{aligned}$$

■

2.3 Écart-type

Définition 2.15 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Proposition 2.16 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. Alors,

$$X^*=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée - c-à-d $\mathbb{E}(X^*)=0$ - et réduite - c-à-d $V(X^*)=1$-, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

Démonstration. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle et

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire centrée. Par **linéarité** de l'espérance, on a,

$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire réduite. On a,

$$V(X) = V\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2}V(X) = 1$$

■

3 Lois usuelles finies

3.1 Loi uniforme

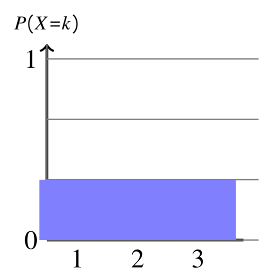
Définition 3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $[\![1,n]\!]$ est une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par,

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

? Cette loi permet de modéliser des situations d'**équiprobabilité**. Par exemple, si on lance un dé équilibré à six faces et que l'on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Exemple 3.2 On lance un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au numéro indiqué par le dé. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

Définition 3.3 Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, $a<b$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $[\![a,b]\!]$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![a,b]\!]$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k\in[\![a,b]\!],\qquad \mathbb{P}([X=k])=\frac{1}{b-a+1}$$

On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}\qquad\text{et}\qquad V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

3.2 Loi de Bernoulli

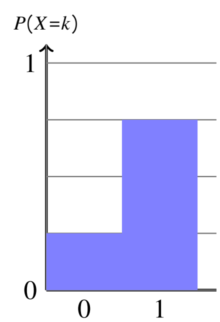
Définition 3.4 Soit $p\in[0,1]$. Une variable aléatoire X **de Bernoulli de paramètre** p est une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par,

$$X(\Omega)=\{0,1\}\qquad\text{et}\qquad \mathbb{P}([X=1])=p\ \text{ et }\ \mathbb{P}([X=0])=1-p$$

On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X)=p\qquad\text{et}\qquad V(X)=p(1-p)$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : **le succès et l'échec**, avec une probabilité p d'obtenir un succès. On associe à cette expérience la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(p)$. Par exemple, pour $p=\frac{1}{3}$, cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Exemple 3.5 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X.

3.3 Loi de binomiale

Définition 3.6 Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **binomiale de paramètres** n **et** p est une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par,

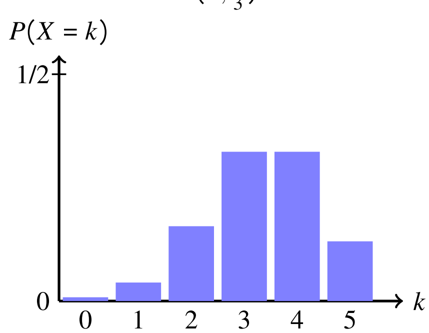
$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Son espérance et sa variance valent alors

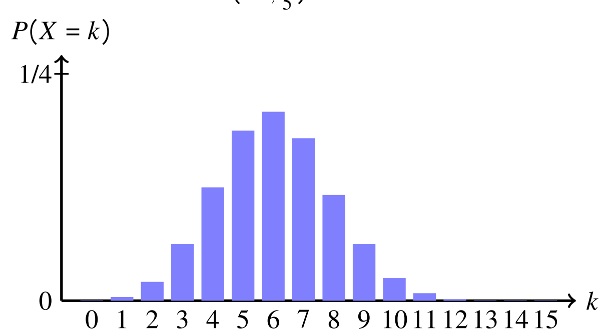
$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès et l'échec**. On **répète** n fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus alors de ces n épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.

$\mathcal{B}(5, \frac{2}{3})$



$\mathcal{B}(15, \frac{2}{5})$



Preuve de l'espérance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme X est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Donc, finalement, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell+1}(1-p)^{n-\ell-1} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} && \text{grâce au binôme de Newton} \\
&= np
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.7 On réalise 10 tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues. Donner la loi de X.

4 Couples de variables aléatoires

Dans tout ce paragraphe, on se place dans un espace probabilisé fini (Ω, P). Toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Définition 4.1 Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. On appelle **couple de variables aléatoires** X et Y, noté (X,Y), l'application suivante

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow E \times F \; ; \; \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

4.1 Loi conjointe

Définition 4.2 On appelle **loi conjointe** de X et Y la loi du couple (X,Y), c'est-à-dire l'application

$$\mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) \longrightarrow [0,1] \; ; \; A \longmapsto P((X,Y) \in A)$$

La loi conjointe de X et Y est entièrement déterminée par la distribution de probabilités

$$(P(X = x, Y = y))_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}$$

On note parfois l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ sous la forme $\{X = x, Y = y\}$ ou $\{(X,Y) = (x,y)\}$. On écrira donc $P(X = x, Y = y)$.

Exemple 4.3 Une urne contient 3 boules blanches et une noire et on tire successivement 2 boules sans remise. Le couple de couleurs ainsi tirées est noté (C_1, C_2). Déterminons la loi de (C_1, C_2).

Proposition 4.4 Les événements $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ pour i parcourant $X(\Omega)$ et j parcourant $Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X = i, Y = j) = 1$$

4.2 Lois marginales

Définition 4.5 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Les lois de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y).

Proposition 4.6 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. On obtient les lois marginales de X ou de Y à partir de la loi conjointe de (X, Y) :

- Pour tout $x_i \in X(\Omega)$, $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{j=1}^{p} P(X = x_i, Y = y_j)$
- Pour tout $y_j \in Y(\Omega)$, $P(Y = y_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j)$.

Démonstration. Conséquence de la formule des probabilités totales car la famille $(Y = y_j)_{j=1,\ldots,p}$ forme un SCE. ■

Exemple 4.7 Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules successivement avec remise. On note X le numéro de la première boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus. La loi conjointe de X et Y est donnée dans le tableau suivant, qui permet d'obtenir les lois marginales :

X/Y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
$X = 1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X = 2$	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X = 3$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X = 4$	0	0	0	$\frac{1}{4}$

Proposition 4.8 — Lois marginales et conditionnement. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors $(\{X = x_i\})_{x_i \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements et

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) P(Y = y_j \mid X = x_i)$$

Démonstration. Conséquence de la formule des probabilités composées. ■

4.3 Généralisation

Tous les résultats précédents se généralisent à une famille de n variables aléatoires. Soient X_1, …, X_n des variables aléatoires à valeurs respectivement dans E_1, …, E_n.

- Le n-uplets des variables aléatoires X_1, …, X_n, noté $(X_1, \ldots, X_n)$ est l'application $\Omega \longrightarrow E_1 \times \ldots \times E_n$; $\omega \longmapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. C'est une variable aléatoire.
- La **loi conjointe** de X_1, …, X_n est la loi de la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.
  Autrement dit, $P((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n) = P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$.
- Les lois de X_1, …, X_n sont appelées les **lois marginales** de $(X_1, \ldots, X_n)$.

4.4 Covariance de deux variables aléatoires

Définition 4.9 Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On appelle **covariance** de X et Y le réel

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition 4.10 Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Alors

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. On a,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

■

Définition 4.11 On dit que X et Y sont **décorrélées** si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Proposition 4.12 Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Alors

$$V(X+Y) = V(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + V(Y)$$

En particulier, si X et Y sont décorrélées, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration. On a,

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y-E(X+Y))^2) \\
&= E((X-E(X)+Y-E(Y))^2) \\
&= E((X-E(X))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2) \\
&= V(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

■

5 Inégalités probabilistes

Proposition 5.1 — Inégalité de Markov. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives sur Ω. Pour tout $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Plus a est grand, plus la probabilité que X prenne des valeurs supérieures à a est petite.

Démonstration. On a,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \\
&= \sum_{x \geq a} xP(X = x) + \sum_{x > a} xP(X = x) \\
&\geq \sum_{x \geq a} xP(X = x) && \text{(car } X \text{ à valeurs positives)} \\
&\geq \sum_{x \geq a} aP(X = x) \\
&\geq aP(X \geq a)
\end{aligned}$$

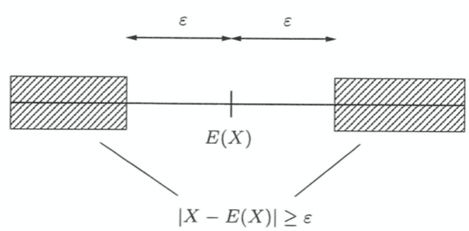
■

Exemple 5.2 Une usine produit en moyenne 50 pièces par jour. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces produites par jour. Déterminons une majoration de la probabilité que la production dépasse 75 pièces en une journée.

Proposition 5.3 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Cette inégalité offre une manière d'interpréter la dispersion d'une variable aléatoire : les résultats sont d'autant plus concentrés autour de l'espérance que la variance (et donc l'écart-type) est faible.



Démonstration. En appliquant l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &= P\left(|X - E(X)|^2 \geq \varepsilon^2\right) \\ &\leq \frac{E((|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

■

Exemple 5.4 Une usine produit en moyenne 50 pièces par jour. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces produites par jour. Déterminons une majoration de la probabilité que la production dépasse 75 pièces en une journée.

6 Variables aléatoires indépendantes

6.1 Cas de deux variables aléatoires

Définition 6.1 Soient X et Y des variables aléatoires sur Ω. Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes**, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$, si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B)$$

Proposition 6.2 — Caractérisation avec les évènements élémentaires. Soient X et Y des variables aléatoires sur Ω. Alors,

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \iff \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Ainsi, dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, la loi conjointe du couple (X,Y) se calcule à partir du produit des deux lois marginales de X et Y : $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Ce n'est pas le cas si les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Exemple 6.3 Un sac contient quatre jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 4. On tire deux jetons avec remise. On note X_1 le numéro du 1er jeton, X_2 le numéro du 2eme jeton et Y le plus grand des numéros obtenus.

1. Sans faire de calculs, «à l'intuition», pensez-vous que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ? et les variables aléatoires X_1 et Y ?
2. Déterminer la loi conjointe de (X_1, Y) puis les loins marginales. En déduire que X_1 et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 6.4 Soient X et Y deux variables aléatoires. Soient $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) > 0$ et $y \in Y(\Omega)$. Si X et Y sont indépendantes alors $P(Y = y \mid X = x) = P(Y = y)$.

Démonstration. Supposons X et Y indépendantes. Alors

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)} = \frac{P(Y = y)P(X = x)}{P(X = x)} = P(Y = y)$$

par indépendance de X et Y. ■

Proposition 6.5 — Somme de variables aléatoires. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.

- La loi de la somme $X + Y$ est donnée, pour tout $s \in (X + Y)(\Omega)$ par

$$P(X + Y = s) = \sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega) \\ x+y=s}} P(X = x, Y = y)$$

- En particulier, si X et Y sont à valeurs positives et $(X + Y)(\Omega) = [\![0, n]\!]$, alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i)$$

  et si, de plus, X et Y sont indépendantes, alors

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i)$$

Exemple 6.6 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second dé. On définit les variables aléatoires somme $S = X + Y$ et produit $M = XY$ de X et Y. Déterminons $P(S = 8)$ et $P(M = 15)$. En déduire que les variables S et M ne sont pas indépendantes.

Proposition 6.7 Soient X et Y des variables aléatoires sur Ω. Soient f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

6.2 Cas de plusieurs variables aléatoires

Définition 6.8 Soient X_1, …, X_n des variables aléatoires sur Ω. Les variables aléatoires X_i sont dites **indépendantes** (ou **mutuellement indépendantes**) si, pour toutes parties $A_1 \in X_1(\Omega)$, …, $A_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n)$$

Proposition 6.9 — Caractérisation. Soient X_1, …, X_n des variables aléatoires sur Ω. Alors X_1, …, X_n sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Exemple 6.10 Soient p_1, …, $p_n \in [0,1]$ et X_1, …, X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_1, …, p_n. Quelle loi suit la variable aléatoire $X_1 \times \cdots \times X_n$?

Proposition 6.11 Soient X_1, …, X_n n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p : $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Alors

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Autrement dit, la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 6.12 On lance simultanément cinq pièces équilibrées. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces ayant donné pile. Quelle est la loi de X ?

Proposition 6.13 — Lemme de coalition. Soient X_1, …, X_n n variables aléatoires réelles sur Ω. Soient $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. Si les variables aléatoires X_1, …, X_n sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Cet énoncé dit simplement si trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur un même espace probabilisé fini sont indépendantes alors, en particulier, les variables aléatoires $X + Y$ et Z le sont aussi, $\mathrm{e}^X Y$ et Z également.

Exemple 6.14 On considère trois lancers successifs d'un dé. On note X_i le résultat du $i^{\text{ème}}$ lancer. On note $N = X_1 + X_2 + X_3$ le total obtenu. Déterminons la probabilité de $N > 14$ sachant $X_1 + X_2 = 11$.

6.3 Lien entre indépendance et espérance/variance

On rappelle que

- La formule de transfert pour une variable aléatoire X sur Ω et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la suivante :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

- La formule de transfert pour un couple de variables aléatoires (X, Y) sur Ω et $f : (X, Y)(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la suivante :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} f(x, y) P(X = x, Y = y)$$

Exemple 6.15 Calculer $E(XY)$ où (X, Y) est un couple de loi conjointe donnée par

X/Y	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Proposition 6.16 — Espérance de variables indépendantes. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Si X et Y sont **indépendantes** alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes sur Ω alors

$$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n)$$

Attention, la réciproque est fausse : on peut avoir $E(XY) = E(X)E(Y)$ sans que les variables aléatoires soient indépendantes comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 6.17 Soit (X, Y) un couple de loi conjointe donnée par

X/Y	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition 6.18 — Variance et covariance de variables indépendantes. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.

- Si X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

- Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires **indépendantes** sur Ω alors

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$$

Démonstration. De manière générale,

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et

$$V(X+Y) = V(X) + 2\mathrm{cov}(X,Y) + V(Y)$$

Or, si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Ce qui conclut la preuve. ■

Exemple 6.19 Retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale grâce à ces formules.