

# TD 30 – Variables Aléatoires Finies

## 1 Savoir déterminer une loi

**Exercice 1** – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note  $S$  la variable aléatoire donnant la somme des deux dés et  $X$  la variable aléatoire donnant la plus grande valeur obtenue parmi les deux dés. Donner les lois de  $S$  et de  $X$ .

**Exercice 2** – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner  $X(\Omega)$ .
2. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Déterminer la loi de  $Y = (X - 1)^2$ .
4. Reprendre les trois questions précédentes dans le cas où les tirages sont cette fois-ci avec remise.

**Exercice 3** – Un joueur mise 1 euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette deux dés.

- Si l'entier choisi sort une fois, le joueur gagne deux euros.
- Si l'entier choisi sort deux fois, le joueur gagne trois euros.
- Si l'entier choisi ne sort à aucun des deux lancers, le joueur perd sa mise.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en comptant sa mise initiale). Déterminer la loi de  $X$ .

**Exercice 4** – Soit  $X$  une variable aléatoire ne pouvant prendre que les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de  $X$  sachant que  $P(X < 5) = 1/6$ ,  $P(X > 5) = 1/2$  et  $P(X \leq 3) = P(X = 4)$ .

**Exercice 5** – Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note  $Z$  la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de  $Z$ .
2. Vérifier que

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$$

**Exercice 6 – Loi conditionnelle.** Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante: la face 6 est tirée la moitié du temps et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance. On note  $X$  le résultat du dé.

1. Déterminer la probabilité que le dé soit truqué sachant  $X = 6$ .
2. Déterminer la probabilité que le dé ne soit pas truqué sachant  $X = 2$ .

## 2 Espérance et variance

**Exercice 7** – Soit  $X$  une variable aléatoire de loi donnée par

k	-1	0	1
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer l'espérance de  $Y = X^2 + 3$  de deux façons différentes :

1. en déterminant la loi de  $Y$ ;
2. en appliquant le théorème de transfert.

**Exercice 8** – Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. Que vaut  $\mathbb{P}(X < -1)$  ?
2. Que vaut  $\mathbb{P}(X \geq 0)$  ?
3. Calculer l'espérance de  $X$ .
4. Calculer la variance de  $X$ .
5. Déterminer la loi de  $Y = |X - 1|$ .

**Exercice 9** – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de  $X$  (cf Exercice 2).
2. Déterminer l'espérance de  $X$ .
3. Déterminer la variance de  $X$ .

**Exercice 10** – On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ , l'urne numérotée  $k$  contenant  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$  indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note  $X$  le numéro de l'urne choisie et on note  $Y$  le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $X$  ?
2. Déterminer la loi de  $Y$ .
3. Quelle est l'espérance de  $Y$  ? Comment l'interprétez-vous ?

## 3 Reconnaître et manipuler les lois usuelles

**Exercice 11** – Dans chacune des situations, reconnaître la loi de la variable aléatoire décrite.

1. Une urne contient 4 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire aléatoirement une boule dans l'urne et on note  $X$  son numéro. Quelle est la loi de  $X$  ?
2. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 4 boules de l'urne. On note  $X$  le nombre de boules noires tirées. Quelle est la loi de  $X$  ?
3. Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3, indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. On note  $X$  le nombre de boules numérotées 1 obtenues. Quelle est la loi de  $X$  ?
4. On lance deux dés équilibrés à six faces. On note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de  $X$ .
5. On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de  $X$ . Donner son espérance et sa variance.

**Exercice 12** – Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Les résultats de  $X$  sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque  $X$  prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de  $X$ , mais lorsque  $X$  prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et  $n$ . On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner  $Y(\Omega)$ .
2. Soient  $i \in \{0, n\}$  et  $k \in \{1, n\}$ . Déterminer  $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k])$ .
3. En déduire la loi de  $Y$ . On pourra utiliser la formule des probabilités totales.
4. Calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .

**Exercice 13** – Edhec 2018, Maths S. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses  $0, 1, \dots, n$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  (on a donc  $X_0 = 0$ ).

1. (a) Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $X_n$ .  
(b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  possède une espérance et une variance à déterminer.
2. On note  $Y$  le rang du premier retour à l'origine du mobile. On admet que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  sont mutuellement indépendantes.
  - (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer l'évènement  $[Y = n]$  à l'aide des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
  - (b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

**Exercice 14** – Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ .

1. On suppose que  $X \sim \mathcal{B}(p)$ . Déterminer les lois de  $X^2$  et  $2X - 1$ .
2. On suppose que  $X \sim \mathcal{U}(\{-2, \dots, 2\})$ . Déterminer la loi de  $X^2 + 1$  ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose que  $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ . Identifier la loi de  $n - X$ .
4. On suppose que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Identifier la loi de  $n - X$ .
5. On suppose que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Calculer l'espérance de  $\frac{1}{1+X}$ .

## 4 Couples de variables aléatoires

**Exercice 15** – Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher : 3 rouges, 2 vertes et 1 noire. On tire successivement et sans remise et au hasard 3 boules du sac. On note  $X$  le nombre de boules rouges parmi les 3 boules tirées, et  $Y$  le nombre de vertes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
2. En déduire les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
4. Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$ , et  $E(XY)$ .

**Exercice 16** – Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x/y$	0	1	2
0	3/15	1/15	1/15
1	2/15	0	?
2	1/15	2/15	2/15

1. Déterminer  $P(X = 1, Y = 2)$ .
2. Donner les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
3. Calculer  $E(X + Y)$  et  $V(X + Y)$ .

**Exercice 17** – Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X/Y$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X$  et  $Y$ .
3. Pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{0, \dots, 3\}$  déterminer les lois de  $X$  conditionnée par  $\{Y = j\}$  et de  $Y$  conditionnée par  $\{X = i\}$ .
4. Soit  $U = X \times Y$ . Déterminer la loi de  $U$ .
5. Soit  $V = \min(X, Y)$ . Déterminer la loi de  $V$ .
6. Donner la loi conjointe de  $(U, V)$ .

**Exercice 18** – On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$  et pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $P(X = i, Y = j) = a \times i \times j$ .

1. Déterminer la valeur de  $a$ , puis donner la loi et l'espérance de  $X$  et de  $Y$ .
2. Calculer  $P(X = Y)$ .

**Exercice 19** – On jette  $n$  dés de couleurs différentes ( $n \geq 1$ ) et on note  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire égale aux nombres de 1 (resp. 6) obtenus.

1. Déterminer les lois suivies par  $X$  et  $Y$ , leurs espérances et leurs variances.
2. Donner la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ .
3. Déterminer la loi de  $Z = n - X - Y$ .
4. Montrer que  $V(Z) = V(X) + V(Y) + 2(E(X)E(Y) - E(XY))$ .
5. En déduire la valeur de  $E(XY)$ .

**Exercice 20** – On suppose que le nombre de colis fragiles expédiés par jour par une entreprise suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, 4\}$ . Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. On suppose qu'un colis sur deux est détérioré. On s'intéresse aux colis expédiés un jour donné: on note  $N$  le nombre de colis expédiés,  $X$  celui des colis détériorés et  $Y$  le nombre de colis arrivés en bon état.

1. Calculer  $P(X = k | N = n)$  pour les différentes valeurs possibles de  $n$  et  $k$ .
2. Donner la loi de  $(X, N)$  et celle de  $X$ .
3. Déterminer  $E(Y)$ .

**Exercice 21 – Extrait Banque PT 2021.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$  telles que  $P(X_2 = 0 | X_1 = 1) = \alpha$  et  $P(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \beta$  avec  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$ . On suppose que  $P(X_1 = 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ .

1. Calculer la loi de  $X_2$  et celle du couple  $(X_1, X_2)$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X_1$  et de  $X_2$ .
3. Calculer la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ . Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 22 – Un classique.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ . On pose  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

1. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , calculer  $P(X_1 \leq k)$ .
2. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , exprimer  $\{Y \leq k\}$  en fonction des  $\{X_i \leq k\}$  (avec  $i = 1, \dots, n$ ).
3. En déduire pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la valeur de  $P(Y \leq k)$ .
4. Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Justifier que

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1)$$

5. En déduire la loi de  $Y$ .
6. Montrer que  $E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ .

## 5 Inégalités probabilistes

**Exercice 23** – Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une variable aléatoire suivant une loi  $\mathcal{B}(4n, 1/2)$ .

1. Donner, sans démonstration, les valeurs de  $E(X)$  et de  $V(X)$ .
2. Majorer  $P(X \geq 3n)$  grâce à l'inégalité de Markov. Commenter.
3. Majorer  $P(X \geq 3n)$  grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff. Commenter.
4. Obtenir une autre majoration en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire  $Y = 2^X$ . Est-elle meilleure que les précédentes ?

**Exercice 24** – Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient une proportion inconnue  $p$  de boules blanches. On y effectue  $n$  tirages avec remise et on note  $X_n$  le nombre de boules blanches obtenues lors de ces  $n$  tirages.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de  $X_n$ .
2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de  $p$  d'au plus  $10^{-2}$  ?