

TD 30 – Variables Aléatoires Finies (Correction)

1 Savoir déterminer une loi

Exercice 1 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés et X la variable aléatoire donnant la plus grande valeur obtenue parmi les deux dés. Donner les lois de S et de X .

La loi de probabilité pour S (somme des deux dés) est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La loi de probabilité pour X (max des deux dés) est :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exercice 2 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X .
3. Déterminer la loi de $Y = (X - 1)^2$.
4. Reprendre les trois questions précédentes dans le cas où les tirages sont cette fois-ci avec remise.

Cas sans remise.

1.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

2. La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{12}$

3. La loi de $Y = (X - 1)^2$ est donnée par

k	0	1
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

Cas avec remise.

1.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

2. La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{121}{256}$	$\frac{110}{256}$	$\frac{25}{256}$

3. La loi de $Y = (X - 1)^2$ est donnée par

k	0	1
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{110}{256}$	$\frac{146}{256}$

Exercice 3 – Un joueur mise 1 euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette deux dés.

- Si l'entier choisi sort une fois, le joueur gagne deux euros.
- Si l'entier choisi sort deux fois, le joueur gagne trois euros.
- Si l'entier choisi ne sort à aucun des deux lancers, le joueur perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en comptant sa mise initiale). Déterminer la loi de X .

(Correction non détaillée.) La loi de X est donnée par

k	-1	1	2
$P(X = k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 4 – Soit X une variable aléatoire ne pouvant prendre que les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de X sachant que $P(X < 5) = 1/6$, $P(X > 5) = 1/2$ et $P(X \leq 3) = P(X = 4)$.

Introduisons les notations suivantes :

k	3	4	5	6
$\mathbb{P}([Y = k])$	p_3	p_4	p_5	p_6

Traduisons les informations disponibles grâce à ces notations.

- On sait que $P(X < 5) = 1/6$ ce qui signifie que

$$p_3 + p_4 = \frac{1}{6}$$

- On sait que $P(X > 5) = 1/2$ ce qui signifie que

$$p_6 = \frac{1}{2}$$

- On sait que $P(X \leq 3) = P(X = 4)$ ce qui signifie que

$$p_3 = p_4$$

En combinant la première et la troisième information, on trouve que

$$p_3 = p_4 = \frac{1}{12}$$

Enfin, on sait que (propriété du cours),

$$p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

ce qui permet de trouver que

$$p_5 = \frac{1}{3}$$

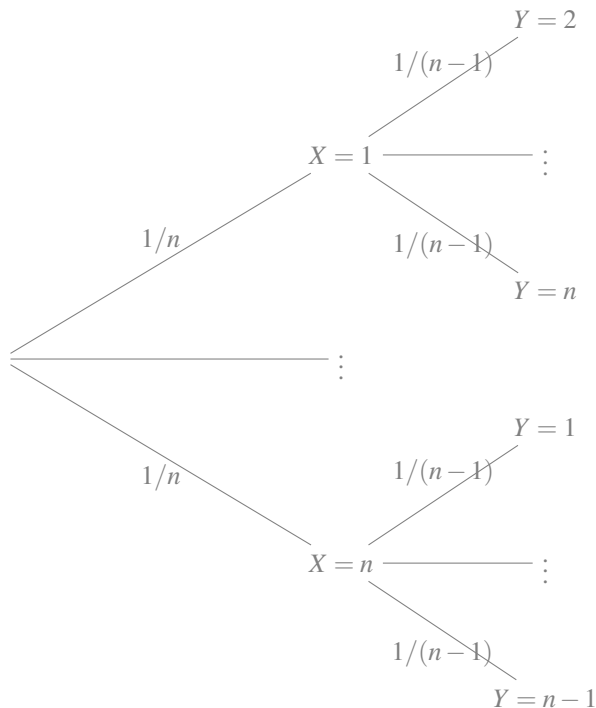
Ainsi, la loi de X est donnée par

k	3	4	5	6
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z .

On peut représenter la situation sur un arbre de probabilité (complété de manière partielle). Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule.



On remarque déjà que

$$Z(\Omega) = \{1, \dots, n\}$$

Puis, regardons au cas par cas.

$$\begin{aligned} \boxed{P(Z = 1)} &= P(X = 1 \cup (X = 2 \cap Y = 1) \cup (X = 3 \cap Y = 1) \cup \dots \cup (X = n \cap Y = 1)) \\ &= P(X_1) + P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 3 \cap Y = 1) + \dots + P(X = n \cap Y = 1) \\ &\text{par incompatibilité des évènements} \\ &= P(X_1) + P(X = 2) \times P_{X=2}(Y = 1) + P(X = 3) \times P_{X=3}(Y = 1) + \dots + P(X = n) \times P_{X=n}(Y = 1) \\ &\text{par formule des probas composées (attention pas d'indépendance!)} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{n-1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n(n-1)} \\ &= \boxed{\frac{2(n-1)}{n(n-1)}} \end{aligned}$$

2. Vérifier que

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$$

On a

$$\boxed{\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k])} = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n (2n) - 2 \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{n(n-1)} (2n^2 - n(n+1)) = \boxed{1}$$

Exercice 6 – Loi conditionnelle. Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante: la face 6 est tirée la moitié du temps et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance. On note X le résultat du dé.

- Déterminer la probabilité que le dé soit truqué sachant $X = 6$.

Notons T l'évènement «Le dé choisi est truqué». On cherche alors à calculer $P_{X=6}(T)$. Par **formule de Bayes**, on a,

$$P_{X=6}(T) = \frac{P_T(X=6) \times P(T)}{P(X=6)}$$

Or, d'après l'énoncé, on a,

$$P_T(X=6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

De plus, d'après la **formule des probabilités totales**, car (T, \bar{T}) forme un SCE, on a,

$$\begin{aligned} P(X=6) &= P(T) \times P_T(X=6) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(X=6) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

En regroupant toutes ces informations, on trouve que

$$\boxed{P_{X=6}(T)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}{\frac{7}{30}} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

- Déterminer la probabilité que le dé ne soit pas truqué sachant $X = 2$.

On raisonne de même.

$$\boxed{P_{X=2}(\bar{T})} = \frac{P_{\bar{T}}(X=2) \times P(\bar{T})}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6}} = \boxed{\frac{20}{23}}$$

À noter que $P_T(X=2) = \frac{1}{10}$ car pour un dé truqué, la face 6 est tirée la moitié du temps et les autres faces apparaissent avec la même probabilité, ce qui signifie que les faces 1, 2, 3, 4, 5 sortent chacune 1/10-ième du temps.

2 Espérance

et

variance

Exercice 7 – Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

k	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer l'espérance de $Y = X^2 + 3$ de deux façons différentes :

1. en déterminant la loi de Y ;

Tout d'abord,

$$Y(\Omega) = \{(-1)^2 + 3, 0^2 + 3, 1^2 + 3\} = \{3, 4\}$$

Puis, on a

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X^2 + 3 = 3) = \mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{10}$$

et de même,

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X^2 + 3 = 4) = \mathbb{P}(X^2 = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cup X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

Ainsi, la loi de Y est donnée par

k	3	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)} = 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{7}{10} = \boxed{\frac{37}{10}}$$

2. en appliquant le théorème de transfert.

Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance et par **théorème de transfert**,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)} = [(-1)^2 + 3] \times \frac{1}{10} + [(0)^2 + 3] \times \frac{3}{10} + [(1)^2 + 3] \times \frac{6}{10} = \boxed{\frac{37}{10}}$$

Exercice 8 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. Que vaut $\mathbb{P}(X < -1)$?

On a

$$\mathbb{P}(X < -1) = \frac{2}{5}$$

2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geq 0)$?

On a

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{3}{5}$$

3. Calculer l'espérance de X .

Comme X est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{9}{20}$$

4. Calculer la variance de X .

Comme X est une v.a **finie**, par **théorème de transfert**, X^2 admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{25}{4}$$

et donc X admet une variance donnée par

$$V(X) = \frac{2419}{400}$$

5. Déterminer la loi de $Y = |X - 1|$.

On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 3, 4\}$ et

k	0	1	3	4
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$

Exercice 9 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X (cf Exercice 2).

La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{12}$

2. Déterminer l'espérance de X .

La v.a X est **finie** donc elle admet une espérance donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{8}$$

3. Déterminer la variance de X .

La v.a X est **finie** donc, par **théorème de transfert**, X^2 admet une espérance qui vaut.

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{19}{24}$$

Puis, X admet une variance qui vaut

$$V(X) = \frac{77}{192}$$

Exercice 10 – On dispose de n urnes numérotées de 1 à n , l'urne numérotée k contenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On choisit d'abord au hasard, de manière **équiprobable**, une urne parmi les n urnes. Ainsi, X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$

2. Déterminer la loi de Y .

Tout d'abord,

$$Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. D'après la **formule des probabilités totales**, comme $([X = i])_{i=1, \dots, n}$ est un SCE, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i) \times P_{X=i}(Y = k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times P_{X=i}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{X=i}(Y = k)$$

Or, dans l'urne i , il y a i boules numérotées de 1 à i que l'on tire de manière équiprobable, donc,

$$P_{X=i}(Y = k) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{X=i}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$$

3. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{k}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{k}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{1}{2n} \times \frac{n^2 + 3n}{2} \\ &= \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

3 Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 11 – Dans chacune des situations, reconnaître la loi de la variable aléatoire décrite.

1. Une urne contient 4 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire aléatoirement une boule dans l'urne et on note X son numéro. Quelle est la loi de X ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4\})$$

2. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 4 boules de l'urne. On note X le nombre de boules noires tirées. Quelle est la loi de X ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 5/8)$$

3. Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3, indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. On note X le nombre de boules numérotées 1 obtenues. Quelle est la loi de X ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/3)$$

4. On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X .

Par construction, la variable aléatoire est à valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus, comme les lancers de dés suivent une loi uniforme,

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{36 - 6}{36} = \frac{5}{6}$$

Donc, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

5. On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X . Donner son espérance et sa variance.

On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(360, \frac{1}{6})$. Donc

$$\mathbb{E}(X) = 60$$

et

$$V(X) = 50$$

Exercice 12 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X , mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n . On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner $Y(\Omega)$.

On a :

$$Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$$

2. Soient $i \in \{0, n\}$ et $k \in \{1, n\}$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k])$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a

- Si $i = 0$, alors

$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k]) = \frac{1}{n}$$

- Si $i \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = i]) = 1$$

et si $k \neq i$,

$$\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = k) = 0$$

3. En déduire la loi de Y . On pourra utiliser la formule des probabilités totales.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. D'après la **formule des probabilités totales**,

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k]) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Comme Y est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance donnée par,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{(1-p)^n(n+1) - 2np}{2}$$

Exercice 13 – Edhec 2018, Maths S. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0 . Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O . Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, n$. Pour tout entier naturel n , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

1. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n .
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n possède une espérance et une variance à déterminer.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots sont mutuellement indépendantes.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .
 - (b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 14 – Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(p)$. Déterminer les lois de X^2 et $2X - 1$.

La variable $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$ La loi de $Y = 2X - 1$ est donnée par

k	-1	1
$\mathbb{P}([Y = k])$	$1 - p$	p

2. On suppose que $X \sim \mathcal{U}(\{-2, \dots, 2\})$. Déterminer la loi de $X^2 + 1$ ainsi que son espérance et sa variance.

La loi de $Y = X^2 + 1$ est donnée par

k	1	2	5
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

L'espérance de Y est donné par

$$E(Y) = \frac{15}{5} = 3$$

Par formule de transfert, déjà on peut calculer que

$$E(Y^2) = \frac{59}{5}$$

Enfin, par formule de Koenig-Huygens, la variance de Y vaut

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{14}{5}$$

3. On suppose que $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$. Identifier la loi de $n - X$.

On a $n - X \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n - 1\})$

4. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Identifier la loi de $n - X$.

Notons $Y = n - X$. Déjà comme $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. On en déduit que

$$Y(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

De plus, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on a,

$$P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-(n-k)}$$

Ainsi, par formule de symétrie des coefficients binomiaux, on obtient

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} = \binom{n}{k} (1-p)^k (1 - (1-p))^{n-k}$$

Donc

$$Y \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$$

5. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

Par formule de transfert,

$$\begin{aligned}
 \boxed{E\left(\frac{1}{1+X}\right)} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} P(X=k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{k!(n+1-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \frac{n!}{p(n+1)!} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{p(n+1)} \left((p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{p(n+1)} \left(1 - (1-p)^{n+1} \right)}
 \end{aligned}$$

4 Couples de variables aléatoires

Exercice 15 – Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher : 3 rouges, 2 vertes et 1 noire. On tire successivement et sans remise et au hasard 3 boules du sac. On note X le nombre de boules rouges parmi les 3 boules tirées, et Y le nombre de vertes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois marginales de X et Y .

Questions 1. et 2. regroupées.

x/y	0	1	2	$P(X = \dots)$
0	0	0	1/20	1/20
1	0	6/20	3/20	9/20
2	3/20	6/20	0	9/20
3	1/20	0	0	1/20
$P(Y = \dots)$	1/5	3/5	1/5	

3. X et Y sont-elles indépendantes?

En s'aidant du tableau, on peut remarquer que

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \quad \text{alors que} \quad P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{15} \neq 0$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et $E(XY)$.

On peut calculer que

$$E(X) = \frac{3}{2}, \quad E(X^2) = \frac{27}{10}, \quad V(X) = \frac{9}{20}$$

et que

$$E(Y) = \frac{2}{5}, \quad E(Y^2) = \frac{2}{3}, \quad V(Y) = \frac{38}{75}$$

Enfin, d'après la formule de transfert,

$$E(XY) = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^2 xyP(X=x, Y=y) = \frac{6}{5}$$

Exercice 16 – Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

x/y	0	1	2
0	$3/15$	$1/15$	$1/15$
1	$2/15$	0	?
2	$1/15$	$2/15$	$2/15$

1. Déterminer $P(X = 1, Y = 2)$.

On sait que la somme de toutes les probabilités du tableau doit faire 1. On en déduit que la probabilité manquante vaut

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{3}{15}$$

2. Donner les lois marginales de X et Y .

x/y	0	1	2	$P(X = \dots)$
0	$3/15$	$1/15$	$1/15$	$5/15$
1	$2/15$	0	$3/15$	$5/15$
2	$1/15$	$2/15$	$2/15$	$5/15$
$P(Y = \dots)$	$6/15$	$3/15$	$6/15$	

3. Calculer $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.

Par linéarité de l'espérance on a,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1 + 1 = 2$$

Pour la variance, c'est plus compliqué :

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y)$$

Or

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{6}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

et

$$E(X^2) = \frac{5}{3} \quad \text{donc} \quad V(X) = \frac{2}{3}$$

et

$$E(Y^2) = \frac{9}{5} \quad \text{donc} \quad V(Y) = \frac{4}{5}$$

Finalement,

$$V(X + Y) = \frac{28}{15}$$

Exercice 17 – Soient X, Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

X/Y	0	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0

1. Déterminer les lois marginales de X et Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

X/Y	0	1	2	3	
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

On peut remarquer que

$$P(X = 2, Y = 1) = 0 \quad \text{tandis que} \quad P(X = 2) \times P(Y = 1) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \neq 0$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Calculer l'espérance et la variance de X et Y .

On a,

$$E(X) = \frac{9}{5}, \quad E(X^2) = 4 \quad V(X) = \frac{19}{25}$$

et

$$E(Y) = \frac{7}{5} \quad E(Y^2) = \frac{16}{5} \quad V(Y) = \frac{31}{25}$$

3. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{0, \dots, 3\}$ déterminer les lois de X conditionnée par $\{Y = j\}$ et de Y conditionnée par $\{X = i\}$.

On a,

$$P_{Y=1}(X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10}} = 1$$

$$P_{Y=1}(X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0}{\frac{2}{10}} = 0$$

$$P_{Y=1}(X = 3) = \frac{P(X = 3, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0}{\frac{2}{10}} = 0$$

et de même pour toutes les autres...

4. Soit $U = X \times Y$. Déterminer la loi de U .

Comme $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient que

$$U(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

Puis, par exemple,

$$P(U = 9) = P(X = 3, Y = 3) = 0$$

ou encore

$$P(U = 0) = P(Y = 0) = \frac{3}{10}$$

et ainsi de suite...

k	0	1	2	3	4	6	9
$\mathbb{P}([U = k])$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	0

5. Soit $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de V .

Comme $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient que

$$V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}([V = k])$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	0

6. Donner la loi conjointe de (U, V) .

Déjà, on peut remarquer que

$$P(U = i, V = j) = 0 \text{ si } j > i$$

Puis par exemple,

$$P(U = 1, V = 1) = P(X = 1, Y = 1)$$

ou encore

$$P(U = 2, V = 1) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{10} + 0$$

U/V	0	1	2	3
0	$\frac{3}{10}$	0	0	0
1	0	$\frac{2}{10}$	0	0
2	0	$\frac{1}{10}$	0	0
3	0	$\frac{1}{10}$	0	0
4	0	0	0	0
6	0	0	$\frac{3}{10}$	0
9	0	0	0	0

Exercice 18 – On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $P(X = i, Y = j) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de a , puis donner la loi et l'espérance de X et de Y .

- Détermination de a . On sait que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(X = i, Y = j) = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a \times i \times j \\ &= a \sum_{i=1}^n i \times \left(\sum_{j=1}^n j \right) \\ &= a \sum_{i=1}^n i \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= a \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$$

- Loi de X . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a, par la **formule des probabilités totales**,

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^n P(X = i, Y = j) = \frac{n(n+1)ai}{2}$$

- Espérance de X . Alors,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = i) = a \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 1$$

- Les formules sont similaires pour Y .

2. Calculer $P(X = Y)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a,

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^n P(X = i, Y = i) = a \sum_{i=1}^n i^2 = a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 19 – On jette n dés de couleurs différentes ($n \geq 1$) et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale aux nombres de 1 (resp. 6) obtenus.

1. Déterminer les lois suivies par X et Y , leurs espérances et leurs variances.

La loi de X : compter le nombre de succès (succès=avoir un 1) parmi n répétitions de la même expérience. On a,

$$X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6}) \quad \text{donc } E(X) = \frac{n}{6} \text{ et } V(X) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$$

De même,

$$Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$$

2. Donner la loi conjointe du couple (X, Y) .

On a,

$$\forall k, i \in \{0, \dots, n\}, k+i \leq n, P(X=k, Y=i) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \binom{n-k}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \times \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k-i}$$

3. Déterminer la loi de $Z = n - X - Y$.

En fait, la variable aléatoire Z compte les lancers (parmi les n) où on a pas obtenu de 1 et 6, c'est-à-dire on compte le nombre de succès (avec succès = avoir 2, 3, 4 ou 5) parmi n lancers. Donc

$$Z \sim \mathcal{B}(n, \frac{4}{6})$$

4. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) + 2(E(X)E(Y) - E(XY))$.

D'après les propriétés de calcul sur la variance,

$$V(Z) = V(n - X - Y) = (-1)^2 V(X + Y) = V(X + Y)$$

Puis, d'après la formule qui donne la variance d'une somme, on a,

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y)$$

Or,

$$\text{cov}(X, Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$$

ce qui donne le résultat.

5. En déduire la valeur de $E(XY)$.

D'après la question précédente, on a,

$$E(XY) = E(X)E(Y) - \frac{1}{2}(V(Z) - V(X) - V(Y))$$

Ainsi,

$$E(XY) = \frac{n}{6} \frac{n}{6} - \frac{1}{2} \left(n \frac{4}{6} \frac{2}{6} - n \frac{1}{6} \frac{5}{6} - n \frac{1}{6} \frac{5}{6} \right) = \frac{n^2 - 8n}{36}$$

Exercice 20 – On suppose que le nombre de colis fragiles expédiés par jour par une entreprise suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 4\}$. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. On suppose qu'un colis sur deux est détérioré. On s'intéresse aux colis expédiés un jour donné: on note N le nombre de colis expédiés, X celui des colis détériorés et Y le nombre de colis arrivés en bon état.

1. Calculer $P(X = k | N = n)$ pour les différentes valeurs possibles de n et k .

Comme N suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 4\}$, les valeurs prises par N peuvent être 1, 2, 3 ou 4. Prenons ainsi $n \in \{1, \dots, 4\}$. La v.a X compte le nombre de colis détériorés parmi ceux envoyés. La loi de X sachant $[N = n]$ compte le nombre de succès (=colis détériorés) parmi la répétition de n fois la même expérience. On reconnaît une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{2}$ (car un colis sur deux est détérioré). Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, On a,

$$P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

2. Donner la loi de (X, N) et celle de X .

Soient $n \in \{1, \dots, 4\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, par **formule des probabilités composées**,

$$P(X = k, N = n) = P(N = n) \times P(X = k | N = n) = \frac{1}{4} \times \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Puis, pour tout $k \in \{0, \dots, 4\}$, par **formule des probabilités totales**, on a,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^4 P(X = k, N = n) \\ &= \sum_{n=\max(k,1)}^4 P(X = k, N = n) \\ &= \sum_{n=\max(k,1)}^4 \frac{1}{4} \times \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

On peut calculer à la main les diverses valeurs.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{15}{64}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

3. Déterminer $E(Y)$.

On remarque que $Y = N - X$ (le nombre de colis en bon état vaut le nombre de colis total moins le nombre de colis détériorés). Donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = E(N) - E(X)$$

Or, N suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 4\}$ donc

$$E(N) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

Or, en s'appuyant sur la loi de X , on calcule que

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

D'où

$$E(Y) = \frac{5}{4}$$

Exercice 21 – Extrait Banque PT 2021. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que $P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \alpha$ et $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \beta$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$. On suppose que $P(X_1 = 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

1. Calculer la loi de X_2 et celle du couple (X_1, X_2) .
2. Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2 .
3. Calculer la covariance de X_1 et X_2 . Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Exercice 22 – Un classique. Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $P(X_1 \leq k)$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. En faisant apparaître une union d'évènements disjoints, on a,

$$P(X_1 \leq k) = P\left(\bigcup_{i=1}^k X_1 = i\right) = \sum_{i=1}^k P(X_1 = i)$$

Or la variable aléatoire suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ donc,

$$\boxed{P(X_1 \leq k)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $\{Y \leq k\}$ en fonction des $\{X_i \leq k\}$ (avec $i = 1, \dots, n$).

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a, par «propriété du max»,

$$\boxed{\{Y \leq k\} = \{X_1 \leq k\} \cap \dots \cap \{X_n \leq k\}}$$

3. En déduire pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la valeur de $P(Y \leq k)$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Les variables aléatoires (X_i) sont indépendantes, donc

$$P(\{Y \leq k\}) = P(\{X_1 \leq k\}) \times \dots \times P(\{X_n \leq k\})$$

Puis en utilisant le résultat de la question 1, on a,

$$\boxed{P(Y \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n}$$

4. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Justifier que

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1)$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a,

$$Y \leq k = (Y = k) \cup (Y \leq k - 1)$$

Or les deux évènements sont disjoints, on obtient donc,

$$\boxed{P(Y \leq k) = P(Y = k) + P(Y \leq k - 1)}$$

d'où le résultat.

5. En déduire la loi de Y .

Déjà, $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$. Puis, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a, en combinant les réponses aux questions précédentes,

$$\boxed{P(Y = k)} = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1) = \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n$$

6. Montrer que $E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

On a,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^n kP(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \left[\left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \right] \\ &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \left(\frac{k}{n}\right)^n \\ &= n + \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n \\ &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n \end{aligned}$$

5 Inégalités

probabilistes

Exercice 23 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(4n, 1/2)$.

1. Donner, sans démonstration, les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Majorer $P(X \geq 3n)$ grâce à l'inégalité de Markov. Commenter.
3. Majorer $P(X \geq 3n)$ grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff. Commenter.
4. Obtenir une autre majoration en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y = 2^X$.
Est-elle meilleure que les précédentes ?

Exercice 24 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue n tirages avec remise et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n tirages.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n .
2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de p d'au plus 10^{-2} ?