# 31. Matrice d'une application linéaire

## 1 Représentation d'une application linéaire en dimension finie

### 1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

**Définition 1.1** On suppose $E$ de dimension $n$, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle **matrice de** $\mathcal{F}$ **dans la base** $\mathcal{B}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j$-ème colonne (pour $j \in [\![1, p]\!]$) est formée des coordonnées du vecteur $\vec{x}_j$ dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

On appelle matrice d'un vecteur dans une base la matrice dans cette base de la famille contenant... ce seul vecteur.

**Exemple 1.2** Soit $\mathcal{B} = ((-1,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$ une base* de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u} = (2,5,-2)$, $\vec{v} = (1,2,0)$. Donner la matrice de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exemple 1.3** Donner la matrice de la famille $(1+X, X+2X^2, -1-X+X^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2[X]$.

**Proposition 1.4** On suppose $E$ de dimension $n$, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. Alors $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est une base de $E$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est inversible.

**Exemple 1.5** Montrons que la famille $(X^2+3X+1, 2X^2+X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

## 1.2 Matrice d'une application linéaire

Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, on peut alors définir la matrice $A$ de $f$ **relativement à une base** $\mathcal{B}_E$ de $E$ et une base $\mathcal{B}_F$ de $F$.

**Définition 1.6** Supposons $E$ de dimension $p$ et $F$ de dimension $n$. Soient $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base de $F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On appelle **matrice de** $f$ **dans les bases** $\mathcal{B}_E$ **et** $\mathcal{B}_F$, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, la matrice de taille $(n,p)$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Autrement dit, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est la matrice de la famille de vecteurs $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_p))$ dans la base $\mathcal{B}_F$ :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_p))$$

Matriciellement, si

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \qquad f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{\varepsilon}_i$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ (décomposition de $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$), on écrit

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & & f(\vec{e}_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{\varepsilon}_1 \\ \\ \vec{\varepsilon}_n \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$$

Les vecteurs $f(\vec{e}_j)$ se lisent sur les colonnes de la matrice. Le nombre de lignes correspond à la dimension de l'espace d'arrivée $F$ et le nombre de colonnes à la dimension de l'espace de départ $E$. La matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies au départ et à l'arrivée mais pas sa taille.

**Exemple 1.7** Déterminons la matrice de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ (x,y) \longmapsto (x, -y, 2x-2y)$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 1.8** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ; $(x, y) \longmapsto (x+2y, 2x+y, 2y)$.

1. Déterminer sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons $\mathcal{B}' = ((1,2),(-1,1))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_3$.

Pour un endomorphisme (application linéaire dont l'espace de départ et l'arrivée sont les mêmes) $f : E \longrightarrow E$, on prend en général la même base au départ et à l'arrivée.

**Définition 1.9 — Cas des endomorphismes.** Supposons $E$ de dimension finie $n$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$. On appelle **matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, que l'on note plus simplement $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

La matrice d'un endomorphisme est forcément une *matrice carrée de taille $n$*, avec $n = \dim(E)$.

**Exemple 1.10** Donnons la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $D : P \longmapsto XP' + P(1)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exemple 1.11** Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$ de dimension $n$. Donner la matrice de $\mathrm{id}_E$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Proposition 1.12 — Matrice de l'image d'un vecteur.** Supposons $E$ et $F$ de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{x} \in E$. Alors

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\vec{x})) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$$

Autrement dit, si

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \iff AX = Y \qquad \text{avec } A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f), X = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x}), Y = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(\vec{y})$$

*Démonstration.* Notons $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, $\mathcal{B}_F = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p)$ et reprenons les notations matricielles ci-dessus. On a

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) \vec{\varepsilon}_i$$

Ainsi,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = AX$$

■

Pour calculer les images d'une application linéaire, il suffit d'effectuer le produit à gauche d'une matrice par un vecteur colonne.

**Exemple 1.13** Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,;\, (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x-y)$. Calculer $f(1,2,-1)$ «matriciellement».

**Exemple 1.14** Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], aX^2 + bX + c \mapsto (a+b)X^2 + (a-b+c)X + a + 2b + c$. Calculer $f(1-2X+X^2)$ «matriciellement».

## 1.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

De manière légèrement abusive, on confond un vecteur $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On peut donc effectuer le produit matriciel $AX$ avec $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X\in\mathbb{R}^p$.

**Proposition 1.15** Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $f_A:\mathbb{K}^p\longrightarrow\mathbb{K}^n\ ;\ X\longmapsto AX$ est linéaire, appelée **application linéaire canoniquement associée à** $A$. C'est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est $A$ : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f_A)=A$.

**Exemple 1.16** Déterminer $f_A$ l'application linéaire canoniquement associée à

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

**Exemple 1.17** Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3\ ;\ (x,y)\longmapsto(x+2y,3x+4y,5x+6y)$. Déterminer la matrice dont $\varphi$ est l'application canonique associée.

# 2 Image, noyau et rang d'une matrice

## 2.1 Image d'une matrice

**Proposition 2.1 — Image d'une matrice.** Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $f_A$ l'application linéaire canoniquement associée.

- On définit l'**image de la matrice** $A$, notée $\mathrm{Im}(A)$, comme l'image de $f_A$ :

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(f_A)$$

- Alors $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes :

$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_p)$$

  où $C_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de $A$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Les opérations sur les colonnes conservent l'image d'une matrice d'après les propriétés de «manipulation des Vect».

**Exemple 2.2** Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Rang d'une matrice

**Définition 2.3** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $f_A$ l'application linéaire canoniquement associée.

- Le rang de $A$ est égal au rang de l'application linéaire $f_A$ canoniquement associée à $A$ :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f_A)$$

- Notons $C_1$, …, $C_p$ les colonnes de $A$. On a aussi

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im} A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p))$$

**Exemple 2.4** Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.5** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Cette proposition signifie que plutôt que de considérer la famille formée par ces colonnes, on peut aussi considérer la famille formée par ces lignes. Ainsi, les opérations sur les lignes ou les colonnes conservent le rang.

**Proposition 2.6** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

**Proposition 2.7** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

**Proposition 2.8** Le rang d'une matrice $A$ ne change pas si on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice.

En pratique, pour calculer le rang d'une matrice, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes pour obtenir une **matrice échelonnée** et obtenir facilement le rang.

**Exemple 2.9** Calculer le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.10 — Rang d'une famille.** On suppose $E$ de dimension $n$, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors le rang de $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est égal au rang de la matrice de $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Cette proposition nous permet, en passant dans le monde des matrices, de récupérer une méthode «type pivot de Gauss» pour calculer le rang d'une famille.

**Exemple 2.11** Soient $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 2 + 3X + X^2$, $P_3 = 2X$ et $P_4 = X^2 + 3$. Déterminons le rang de la famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

**Proposition 2.12 — Rang d'une application linéaire.** Supposons $E$ de dimension $p$ et $F$ de dimension $n$. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$. Alors

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$$

Cette proposition nous permet, en passant dans le monde des matrices, de récupérer une méthode «type pivot de Gauss» pour calculer le rang d'une application linéaire entre espaces de dimension finie.

**Exemple 2.13** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 6z, y + 2z, 2y + 4z)$. Calculer le rang de $f$. En déduire si l'application $f$ est surjective.

## 2.3 Noyau d'une matrice

**Définition 2.14 — Noyau d'une matrice.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $f_A$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$.

- On définit le **noyau de** $A$, noté $\text{Ker}(A)$, comme le noyau de $f_A$ :

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f_A).$$

- Alors

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0_{n,1}\}$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Déterminer le noyau d'une matrice, peut se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène (sur les lignes de la matrice) que l'on effectue, par exemple grâce au pivot de Gauss. Ainsi, les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.

À l'inverse, résoudre un système homogène peut se voir comme la détermination du noyau de la matrice associée au système. Le rang d'un tel système est alors le rang de la matrice associée au système. La dimension de l'espace des solutions est ainsi la dimension du noyau de la matrice associée.

**Exercice 2.15** Déterminer le noyau de la matrice $A$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour trouver rapidement des éléments du noyau d'une matrice, il suffit de regarder si des combinaisons linéaires simples sur les colonnes de la matrice donne le vecteur nul. Attention, cette méthode ne permet pas de déterminer **tous** les éléments du noyau d'une matrice mais seulement de déterminer **un** élément de ce noyau. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut remarquer directement que,

$$C_1 + C_2 = 0$$

où $C_1$ et $C_2$ désigne les deux colonnes de la matrice $A$. On obtient directement que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$$

**Vérification.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.16** Trouver *rapidement* un élément du noyau pour chacune des matrices ci-dessous.

| Matrice | C.L. sur les colonnes | Vecteur du noyau |
|---|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | | |
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | | |
| $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ | | |

## 2.4 Lien entre noyau et image d'une application linéaire

**Proposition 2.17** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a,

$$n = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A))$$

Ce résultat permet de déduire plus rapidement l'image d'une matrice connaissant son noyau ou inversement.

**Exercice 2.18** Pour la matrice $A$ suivante, commencer par déterminer son noyau, puis déterminer *efficacement* son image,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.19** Pour la matrice $A$ suivante, commencer par déterminer son image, puis déterminer *efficacement* son noyau,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3 Transfert de propriétés sur les applications linéaires aux matrices

### 3.1 Opérations sur les opérations linéaires

**Proposition 3.1 — Combinaison linéaire.** Supposons $E$ et $F$ de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathrm{B}_F}(f) + \mu \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g)$$

**Exemple 3.2** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons $u = 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - 2f$. Quelle est la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ?

**Proposition 3.3 — Composition.** Supposons $E$, $F$ et $G$ de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $E$, $\mathcal{B}_F$ une base de $F$ et $\mathcal{B}_G$ une base de $G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

En particulier, si $f$ et $g$ sont des endomorphismes de $E$ et $\mathcal{B}$ une base de $E$, alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

Cette proposition justifie a posteriori la définition (peut-être peu naturelle à première vue) du calcul matriciel : on souhaite une correspondance entre le produit matriciel et l'opération de composition dans le monde des matrices.

**Exemple 3.4** Décrivons les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ des applications linéaires définies par

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \; ; \; (x, y, z) \longmapsto (x - y, 2x + z)$$

et

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; (x, y) \longmapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$$

- Première méthode (vision application linéaire) : On a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{aligned} f(g(x, y)) &= f(x + y, 3x - y, -x + 2y) \\ &= (x + y - (3x - y), 2(x + y) + (-x + 2y)) \\ &= (-2x + 2y, x + 4y) \end{aligned}$$

  On calcule de même $g \circ f$.

**Proposition 3.5 — Puissance.** Supposons $E$ de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f \circ \cdots \circ f) = A^n$$

**Exemple 3.6** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ; $(x,y) \longmapsto (3x+6y, -x-2y)$. Montrons que $f \circ f = f$.

- Première méthode (vision application linéaire) : On a,

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f^2(x,y) &= f(f(x,y)) \\ &= f(3x+6y, -x-2y) \\ &= (3(3x+6y)+6(-x-2y), -(3x+6y)-2(-x-2y)) \\ &= (3x+6y, -x-2y) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

**Proposition 3.7 — Binôme de Newton pour les matrices.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ (les matrices $A$ et $B$ commutent). Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

**Proposition 3.8 — Formule de factorisation.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n - B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

## 3.2 Lien avec le caractère bijectif

**Proposition 3.9 — Isomorphisme.** Supposons $E$ et $F$ de même dimension finie $n$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff A \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas, la matrice de $f^{-1}$ est $A^{-1}$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = A^{-1}$$

*Démonstration.* On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Supposons que $f$ est un isomorphisme. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(\mathrm{id}_F) = I_n$$

  où $n = \dim(F)$. Donc $A$ est inversible, d'inverse $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1})$.
- Supposons $A$ inversible. Notons $g$ l'unique application linéaire de $F$ dans $E$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}_E}(g) = A^{-1}$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = A^{-1}A = I_n$$

  Donc $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f \circ g) = I_n$. Donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Donc $f$ est bijective de $E$ dans $F$. Comme $f$ est linéaire, c'est un isomorphisme.

■

**Exemple 3.10** Montrons que l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\,;\, P \longmapsto P(X+1)$ est un isomorphisme et déterminons son inverse.

Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme. On peut montrer que $\varphi$ est linéaire.

- Première méthode (vision application linéaire). Montrons que $\varphi$ est bijective. Pour cela, on peut «intuiter» la bijection réciproque. Soit

$$\psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]\,;\, Q \longmapsto Q(X-1)$$

  Alors,

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \psi(\varphi(P)) = P \qquad \text{et} \qquad \forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(\psi(Q)) = Q$$

  Donc, $\varphi$ est bijective et sa bijection réciproque est $\psi$.

**Proposition 3.11 — Automorphisme.** Supposons $E$ de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff A \text{ est inversible.}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice de $f^k$ est $A^k$ :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = A^k$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $f_A$ l'application linéaire canoniquement associée. De la proposition précédente, on en déduit que : $A$ est inversible $\iff$ $f_A$ est inversible. Dans ce cas, $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

**Exemple 3.12** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ; $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$. Montrons que $f$ un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminons sa bijection réciproque.

On peut montrer que $f$ est linéaire. De plus, les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes. Il reste à montrer que $f$ est bijective.

- Première méthode (vision application linéaire). Soit $v = (a, b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ quelconque. Montrons qu'il existe un unique $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(u) = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Donc il existe un unique $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$, donné par $u = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et pour tout $v = (a, b) \in F$, on a

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \longmapsto & \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \end{array}$$

**Proposition 3.13** Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ Si $n = p$ alors

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ inversible}$$

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible. Cette proposition permet souvent de montrer plus efficacement qu'une matrice est inversible mais ne permet pas de déduire l'inverse lorsqu'il existe.

**Exemple 3.14** On considère la matrice $A$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si la matrice $A$ est inversible.

## 3.3 Espaces isomorphismes

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. On dit que $E$ et $F$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $E$ sur $F$.

**Proposition 3.15** Supposons $E$ de dimension $n$ et $F$ de dimension $p$. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Alors l'application

$$\varphi_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ ;\ f \longmapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* La linéarité a été vue précédemment. Pour tout matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que,

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \qquad f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{\varepsilon}_i$$

D'où la bijectivité. ■

**Proposition 3.16** Supposons $E$ et $F$ de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\times\dim(F)$$

*Démonstration.* En notant $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$, comme $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes,

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n\times p$$

■

# 4 Changements de bases et matrices de passage

Dans cette partie, on suppose $E$ de dimension finie $n$ et $F$ de dimension finie $p$.

## 4.1 Matrices de passage

**Définition 4.1** Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ deux bases de $E$.
On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$$

On a aussi

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$$

On ne se servira pas de cette vision en pratique mais seulement pour les preuves des résultats théoriques.

La première base $\mathcal{B}$ est souvent considérée comme l'ancienne base ou la base de référence, alors que la deuxième base $\mathcal{B}'$ est considérée comme étant la nouvelle base. Avec $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, on écrit donc la nouvelle base $\mathcal{B}'$ par rapport à l'ancienne base $\mathcal{B}$. Plus précisément, on écrit donc en colonnes les coordonnées de $\vec{e}'_1$, …, $\vec{e}'_n$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e}'_1 & \quad & \vec{e}'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \\ \vec{e}_n \end{array}$$

**Exemple 4.2** On admet que $\mathcal{C} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{C}$.

**Exemple 4.3** Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$. On admet que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $E$. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

**Proposition 4.4** Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de $E$. Alors,

a) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ b) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$

*Démonstration.*

- Comme $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de $\mathrm{id}_E$ qui est un isomorphisme, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et

$$(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = (\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E))^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

- On a

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$$

■

**Exemple 4.5** On admet que $\mathcal{C} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique $\mathcal{B}_c$.

## 4.2 Effet d'un changement de bases

**Proposition 4.6 — Changement de base pour un vecteur.** Soit $\vec{x} \in E$. Alors,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$$

On obtient donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

*Démonstration.* On a $\vec{x} = \mathrm{id}_E(\vec{x})$. Matriciellement, on obtient alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E(\vec{x})) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$$

soit $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$. ■

**Exemple 4.7** Soit $\vec{x} = (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{C} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

**Proposition 4.8 — Changement de bases pour une application linéaire.** Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de $E$. Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de $F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = (P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F})^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$$

*Démonstration.* On pose

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f), \quad A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}, \quad Q = P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F}$$

On a

$$f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f$$

Matriciellement, on obtient alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_F}(f \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_F}(\mathrm{id}_F \circ f)$$

soit

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}(\mathrm{id}_F)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$$

D'où $AP = QA'$, et donc $A' = Q^{-1}AP$. ■

**Proposition 4.9 — Changement de base pour un endomorphisme.** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$. On a,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

**Exemple 4.10** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x-y+z, 2x-y, -2y+z)$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{C} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

## 4.3 Matrices semblables

**Définition 4.11** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $B$ est **semblable** à $A$ (sur $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$.

- Si $B$ est semblable à $A$ alors $A$ est semblable à $B$. On peut donc dire « $A$ et $B$ sont semblables ».

  En effet, si $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A = P^{-1}BP = QBQ^{-1}$ avec $Q = P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $A$ est semblable à $B$ alors $A^p$ est semblable à $B^p$.

  En effet, si $B = PAP^{-1}$ alors $B^p = PA^pP^{-1}$.
- Deux matrices semblables ont le même rang.

  En effet, le rang d'une matrice n'est pas modifié par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible. Donc si $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(PAP^{-1}) = \mathrm{rg}(A)$.
- $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme $f$ dans des bases différentes.

  - En effet, supposons $A$ et $B$ semblables. Alors $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Notons $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Soit $\mathcal{B}'$ la base de $E$ telle que $P^{-1} = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}'}$. Alors $B = PAP^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_c} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
  - Réciproquement, si $A = \mathrm{mat}_B(f)$ et $B = \mathrm{mat}'_B(f)$, en posant $P = P_{B'}^{B}$, on a $B = PAP^{-1}$ et $A$ et $B$ sont donc semblables.

**Exemple 4.12** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

**Exemple 4.13** Montrer que toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $A^2 = 0_2$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.