

TD 31 – Représentation matricielle d'une app. linéaire

1 Matrice associée à une application linéaire

Exercice 1 – Matrice canoniquement associée. Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés.

$$\text{a) } g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, x + y, x - 3y)$$

$$\text{b) } g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P - XP'$$

$$\text{c) } g : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto (P(-1), P(0), P'(1))$$

$$\text{d) } g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^T$$

Exercice 2 – Lien entre les opérations. Soient s et t les deux applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définis par,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, s(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, t(x, y) = (-8y, 7x + y)$$

- Déterminer les matrices S et T canoniquement associées aux applications s et t .
- Déterminer les applications linéaires $s + t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.
- Déterminer les matrices canoniquement associées aux applications linéaires $s + t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.

Exercice 3 – Soient

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]; (a, b, c, d) \longmapsto (2a + b)X^2 + (a - 3b + c)X - 4c$$

$$g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}; P \longmapsto P(2)$$

Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques.

2 Image, noyau, rang

Exercice 4 – Noyau. Déterminer le noyau des matrices suivantes.

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 – Trouver un élément du noyau rapidement. Déterminer pour chaque matrice ci-dessous un élément du noyau.

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 – Image & Rang. Déterminer l'image et le rang des matrices suivantes.

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 – Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction du paramètre α .

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 – Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner, presque de tête, une base des noyaux et des images de A et B .

Exercice 9 – Inversibilité d'une matrice. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles grâce à la méthode de votre choix (on ne demande pas de donner l'inverse).

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 – Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4; P \longmapsto (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0))$.

- Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
- Déterminer l'image de f . L'application f est-elle surjective? On pourra raisonner sur la matrice.

Exercice 11 – Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice, on pourra raisonner au choix au niveau de la matrice ou au niveau de l'application linéaire (après avoir déterminé son expression).

- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Donner la matrice de f dans une base de \mathbb{R}^3 constituée uniquement de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 12 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z).$$

- Ecrire la matrice M de cette application linéaire dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .
- Calculer $f(1, 2, 3)$ de deux manières différentes : en utilisant la définition de f d'une part, et en utilisant la matrice M d'autre part.
- Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, et $v_3 = (1, 3, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Calculer $f(v_1)$ et calculer ses coordonnées dans la base \mathcal{E} . On admettra que, de même, $f(v_2) = v_1 + 6v_2 - 4v_3$ et $f(v_3) = 2v_1 + 8v_2 - 6v_3$.
- Ecrire la matrice N de f dans la base \mathcal{E} .
- Retrouver cette matrice à partir de M , en utilisant la formule de changement de bases.

Exercice 13 – Lien matrices & Applications Linéaires. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - y + z, x + 2y - z + t, x - 4y + 3z - t)$$

- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
- L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- Donner la matrice A canoniquement associée à l'application f . Retrouver tous les résultats des questions précédentes en raisonnant cette fois-ci sur la matrice A .

3 Isomorphisme

Exercice 14 – Soit l'application linéaire

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)). \end{cases}$$

- Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que u est un isomorphisme.
- Déterminer u^{-1} .

Exercice 15 – Peut-on trouver un automorphisme représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad ?$$

4 Changements de bases

Exercice 16 – Déterminer les matrices de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' dans les cas suivants:

- $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (2, 1))$
- $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 0))$
- $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 0))$.

Exercice 17 – Dans \mathbb{R}^3 , on note \mathcal{B}_c la base canonique et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ avec $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{f}_3 = (1, 0, 0)$.

- Justifier que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_c}$.
- Soit $\vec{v} = (1, 3, -2)$. Déterminer les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{C} .
- Soit $\vec{w} = 2\vec{f}_1 - 5\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$. Déterminer les coordonnées de \vec{w} dans la base \mathcal{B}_c .
- Déterminer la matrice de l'application linéaire f définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $f((x, y, z)) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ dans la base \mathcal{B}_c .
- Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{C} .

Exercice 18 – On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathcal{B} = (X^2 + 1, X + 1, 2X^2 - X)$.

- Montrer que \mathcal{B} est une base de E .
- Déterminer la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_c à la base \mathcal{B} et celle de la base \mathcal{B} à la base canonique \mathcal{B}_c .
- Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base \mathcal{B} .
- On considère l'application φ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $\varphi(P) = XP'$. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique \mathcal{B}_c , puis dans la base \mathcal{B} .

Exercice 19 – Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \mapsto (X + 1)P'$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, X + 1, (X + 1)^2)$.

- Calculer $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
- Justifier que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $(A')^n$?
- Justifier l'existence d'une matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$ et calculer cette matrice.
- Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n .

Exercice 20 – Montrer que les matrices suivantes sont semblables:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$