

TD 31 – Représentation matricielle d'une app. linéaire (Correction)

1 Matrice associée à une application linéaire

Exercice 1 – Matrice canoniquement associée. Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés.

$$\text{a) } g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, x + y, x - 3y)$$

$$\text{b) } g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P - XP'$$

$$\text{c) } g : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto (P(-1), P(0), P'(1))$$

$$\text{d) } g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^T$$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Lien entre les opérations. Soient s et t les deux applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définis par,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, s(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, t(x, y) = (-8y, 7x + y)$$

1. Déterminer les matrices S et T canoniquement associées aux applications s et t .

On a,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les applications linéaires $s+t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.

On a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (s+t)(x, y) = (2x - 13y, 4x + 5y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (s \circ t)(x, y) = (-35x - 21y, 28x + 28y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (t \circ s)(x, y) = (24x - 32y, 11x - 31y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (s \circ s)(x, y) = (19x - 30y, -18x + 31y)$$

3. Déterminer les matrices canoniquement associées aux applications linéaires $s+t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.

On a,

$$\text{mat}_{B_c}(s+t) = S+T = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{B_c}(s \circ t) = S \times T = \begin{pmatrix} -35 & -21 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{B_c}(t \circ s) = T \times S = \begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 11 & -31 \end{pmatrix}$$

$$\text{mat}_{B_c}(s \circ s) = S \times S = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -18 & 31 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] ; (a, b, c, d) \longmapsto (2a + b)X^2 + (a - 3b + c)X - 4c \\ g : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} ; P \longmapsto P(2) \end{aligned}$$

Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques.

On peut raisonner uniquement avec les matrices. On a,

$$\text{mat}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{mat}_{B_c}(g) = (1 \quad 2 \quad 4)$$

Donc,

$$\text{mat}_{B_c}(g \circ f) = \text{mat}_{B_c}(f) \times \text{mat}_{B_c}(g) = (10 \quad -2 \quad -2 \quad 0)$$

2 Image,

noyau,

rang

Exercice 4 – Noyau. Déterminer le noyau des matrices suivantes.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) $\text{Ker}(A_1) = \text{Vect}((1, 1))$

b) $\text{Ker}(A_2) = \{(0, 0, 0)\}$

c) $\text{Ker}(A_3) = \text{Vect}((2, -3, 1))$

d) $\text{Ker}(A_4) = \text{Vect}((1, 1, 1))$

Exercice 5 – Trouver un élément du noyau rapidement. Déterminer pour chaque matrice ci-dessous un élément du noyau.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

- a) On remarque que $C_1 + C_2 = 0$ donc $(1, 1) \in \text{Ker}(A_1)$
- b) On remarque que $C_1 + C_2 = C_3$ donc $(1, 1, -1) \in \text{Ker}(A_2)$
- c) On remarque que $2C_1 - C_2 = C_3$ donc $(2, -1, -1) \in \text{Ker}(A_3)$

Exercice 6 – Image & Rang. Déterminer l'image et le rang des matrices suivantes.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

a) $\text{Im}(A_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{rang}(A_1) = 1$

b) $\text{Im}(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$ et $\text{rang}(A_2) = 2$

c) $\text{Im}(A_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{rang}(A_3) = 1$

d) $\text{Im}(A_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{rang}(A_4) = 2$

e) $\text{Im}(A_5) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et après opérations sur les vect

$$\text{Im}(A_5) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

et $\text{rang}(A_5) = 3$

f) $\text{Im}(A_6) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{rang}(A_6) = 1$

Exercice 7 – Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction du paramètre α .

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a,

$$\text{rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 2 & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Exercice 8 – Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner, presque de tête, une base des noyaux et des images de A et B .

Pour la matrice A , on peut calculer rapidement que

$$\text{rg}(A) = 1 \quad \text{et donc} \quad \dim \ker(A) = 2$$

Après on trouve

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Pour la matrice B , on peut calculer rapidement que

$$\text{rg}(B) = 2 \quad \text{et donc} \quad \dim \ker(B) = 1$$

Après on trouve

$$\text{Im}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \ker(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 9 – Inversibilité d'une matrice. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles grâce à la méthode de votre choix (on ne demande pas de donner l'inverse).

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

h) $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

i) $A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) A_1 non inversible

b) A_2 inversible

c) A_3 non inversible

d) A_4 inversible

e) A_5 non inversible

f) A_6 inversible

g) A_7 non inversible

h) A_8 inversible

i) A_9 non inversible

Exercice 10 – Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4 ; P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0))$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

On a,

$$A = \text{mat}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'image de f . L'application f est-elle surjective? *On pourra raisonner sur la matrice.*

On a,

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Donc f est surjective.

Exercice 11 – Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice, on pourra raisonner au choix au niveau de la matrice ou au niveau de l'application linéaire (après avoir déterminé son expression).

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

On remarque que la somme des trois colonnes vaut 0. Ainsi, on peut montrer que

$$\text{rg}(A) = 2 \quad \text{et donc} \quad \dim(\text{ker}(A)) = 1$$

puis que

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \text{ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

• Montrons que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. On a,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) &= \text{Ker}(A) + \text{Im}(A) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{après manipulations sur le vect}) \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

• On sait aussi par théorème du rang que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

D'où $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

3. Donner la matrice de f dans une base de \mathbb{R}^3 constituée uniquement de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

La famille est

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=u_3} \right)$$

est constituée uniquement de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ car $u_1 \in \text{ker}(f)$ et $u_2, u_3 \in \text{Im}(f)$. De plus, en revenant à la définition, on peut montrer que la famille est libre et elle contient autant d'éléments que la dimension de \mathbb{R}^3 , c'est donc une base de \mathbb{R}^3 . De plus, on peut calculer que

$$Au_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Au_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3u_2, \quad Au_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3u_3$$

donc la matrice de f dans \mathcal{B} vaut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z).$$

1. Ecrire la matrice M de cette application linéaire dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .

On a,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer $f(1, 2, 3)$ de deux manières différentes : en utilisant la définition de f d'une part, et en utilisant la matrice M d'autre part.

En utilisant la définition de f , on a,

$$f(1, 2, 3) = (1 + 2, 2 - 2 + 3, 1 + 3) = (3, 3, 4)$$

En utilisant la matrice M , on a, (en identifiant matrice ligne et matrice colonne...)

$$f(1, 2, 3) = M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (3, 3, 4)$$

3. Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, et $v_3 = (1, 3, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Montrons que $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3

- Montrons que $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a,

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\dots) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- De plus, la famille contient autant d'éléments que la dimension de \mathbb{R}^3 (3).

Donc, la famille $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

4. Calculer $f(v_1)$ et calculer ses coordonnées dans la base \mathcal{E} . On admettra que, de même, $f(v_2) = v_1 + 6v_2 - 4v_3$ et $f(v_3) = 2v_1 + 8v_2 - 6v_3$.

On a,

$$f(v_1) = (2, 1, 1) = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 + (-2) \cdot v_3$$

5. Ecrire la matrice N de f dans la base \mathcal{E} .

On a,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

6. Retrouver cette matrice à partir de M , en utilisant la formule de changement de bases.

D'après la formule de changements de base,

$$N = P^{-1}MP$$

où

$$P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant une méthode type pivot de Gauss, on trouve que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En remplaçant dans l'égalité du début, on obtient,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 13 – Lien matrices & Applications Linéaires. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - y + z, x + 2y - z + t, x - 4y + 3z - t)$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

On a,

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in \text{ker}(f) &\Leftrightarrow f(u) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + 2y - z + t &= 0 \\ x - 4y + 3z - t &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t \end{cases} \quad (\text{après avoir fait un pivot de Gauss}) \\ &\Leftrightarrow u = \left(-\frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t, \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t, z, t\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\text{ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

2. Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$.

On en déduit (rédaction à détailler) que

$$\dim(\text{Ker } f) = 2$$

3. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

D'où

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{ker } f) = 4 - 2 = 2$$

4. En déduire une base de $\text{Im}(f)$.

On peut calculer que

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad f(0, 1, 0, 0) = (-1, 2, -4)$$

Ainsi, la famille $((1, 1, 1), (-1, 2, -4))$

- contient des éléments de $\text{Im } f$
- est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires)
- contient autant d'éléments que la dimension de $\text{Im } f$

donc c'est une base de $\text{Im } f$ donc,

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 2, -4))$$

5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On a,

- $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ donc f non injective,
- donc non bijective

- et $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^4$ (car pas les mêmes dimensions) donc f non surjective

6. Donner la matrice A canoniquement associée à l'application f . Retrouver tous les résultats des questions précédentes en raisonnant cette fois-ci sur la matrice A .

On a,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

puis on retrouve tous les résultats précédents grâce à la matrice...

3 Isomorphisme

Exercice 14 – Soit l'application linéaire

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)). \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de \mathbb{R}^3 .

On a,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que u est un isomorphisme.

- Montrons que u est linéaire. (...)
- Montrons que u est bijective. On peut raisonner au niveau de la matrice. On montre qu'elle est inversible (et on détermine son inverse pour préparer la question d'après) par exemple par méthode de pivot de Gauss. On trouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Déterminer u^{-1} .

La matrice de u^{-1} dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puis, on a

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ \frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$

D'où

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u^{-1}(x, y, z) = y + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)X + \left(\frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z\right)X^2$$

Exercice 15 – Peut-on trouver un automorphisme représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad ?$$

On peut montrer avec une méthode type pivot de Gauss que

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure qui comporte un 0 dans la diagonale. Donc A n'est pas inversible. Donc, on ne peut pas trouver un automorphisme représenté par la matrice A .

4 Changements de bases

Exercice 16 – Déterminer les matrices de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' dans les cas suivants:

1. $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (2, 1))$

Pour avoir $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, il faut exprimer les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . On a :

$$(1, 1) = (-1) \cdot (1, -1) + 2 \cdot (1, 0) \quad \text{et} \quad (2, 1) = (-1) \cdot (1, -1) + 3 \cdot (1, 0)$$

D'où

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 0))$

Pour avoir $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, il faut exprimer les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . Ici \mathcal{B} , correspond à la base canonique, les décompositions sont immédiates On a :

$$(1, 1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$$

et de même pour les autres vecteurs. D'où

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 0))$.

Pour avoir $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, il faut exprimer les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . On a :

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 1)$$

$$(2, 1, 1) = 1 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) + 1 \cdot (1, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1) - \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 1)$$

D'où

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 17 – Dans \mathbb{R}^3 , on note \mathcal{B}_c la base canonique et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ avec $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{f}_3 = (1, 0, 0)$.

1. Justifier que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .

- On peut montrer que la famille \mathcal{C} est libre en repassant à la définition.
- La famille contient d'autant d'éléments que la dimension de \mathbb{R}^3 .

Ainsi la famille est une base de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_c}$.

On a facilement que

$$P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_c} = (P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(où on a déterminé l'inverse par pivot de Gauss ou en exprimant les vecteurs de \mathcal{B}_c dans la base \mathcal{C} au choix).

3. Soit $\vec{v} = (1, 3, -2)$. Déterminer les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{C} .

On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{v})$$

Ainsi, par formule de changement de base pour un vecteur,

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{C}}(\vec{v}) &= P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_c} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{C} sont $(-2, 5, -2)$. On peut vérifier que

$$\vec{v} = (-2) \cdot (1, 1, 1) + 5 \cdot (1, 1, 0) + (-2) \cdot (1, 0, 0) \quad \checkmark$$

4. Soit $\vec{w} = 2\vec{f}_1 - 5\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$. Déterminer les coordonnées de \vec{w} dans la base \mathcal{B}_c .

On a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\vec{w})$$

Par formule de changement de bases pour les vecteurs, on a,

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{w}) &= P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} \text{mat}_{\mathcal{C}}(\vec{w}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Déterminer la matrice de l'application linéaire f définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $f((x, y, z)) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ dans la base \mathcal{B}_c .

On a,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{C} .

D'après la formule de changement de bases, on a,

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_c} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) \times P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}}$$

Après calculs, on obtient,

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 – On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathcal{B} = (X^2 + 1, X + 1, 2X^2 - X)$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

- On peut montrer grâce à la définition que la famille \mathcal{B} est libre.
- De plus, elle contient autant d'éléments que la dimension de $E = \mathbb{R}_2[X]$ (qui vaut 3).

Donc la famille \mathcal{B} est une base de E .

2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_c à la base \mathcal{B} et celle de la base \mathcal{B} à la base canonique \mathcal{B}_c .

Notons $(1, X, X^2)$ la base canonique de E . Alors,

$$P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}$, soit on utilise que

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = (P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}})^{-1}$$

soit on remarque que

$$\begin{aligned} 1 &= 2(X^2 + 1) + (-1)(X + 1) + (-1)(2X^2 - X) \\ X &= (-2)(X^2 + 1) + (2)(X + 1) + (1)(2X^2 - X) \\ X^2 &= (-1)(X^2 + 1) + (1)(X + 1) + (1)(2X^2 - X) \end{aligned}$$

et donc

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base \mathcal{B} .

On a,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(P)$$

Donc, par formule de changement de base pour les vecteurs, on a,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(P) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(P)$$

Ainsi,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base \mathcal{B} sont $(5, -3, -2)$. On peut vérifier que

$$5(X^2 + 1) + (-3)(X + 1) + (-2)(2X^2 - X) = P \quad \checkmark$$

4. On considère l'application φ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $\varphi(P) = XP'$. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique \mathcal{B}_c , puis dans la base \mathcal{B} .

Montrons que φ est un endomorphisme de E .

- Montrons que φ est linéaire. Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a,

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)' = X(\lambda P' + \mu Q') = \lambda XP' + \mu XQ' = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

- De plus, l'espace de départ et d'arrivée de φ sont les mêmes. En effet, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ (alors $\deg(P) \leq 2$),

$$\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') \leq 1 + 2 - 1 = 2$$

donc $XP' \in \mathbb{R}_2[X]$.

La matrice de φ dans \mathcal{B}_c vaut

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis, par formule de changement de base, on a,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \times \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) \times P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$$

Après calculs, on obtient,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 – Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \longmapsto (X+1)P'$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$.

1. Calculer $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

On a,

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

La famille \mathcal{B}' est libre (car degrés échelonnés) et contient autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ (qui vaut 3). C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, on peut remarquer que

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (X+1) + 0 \cdot (X+1)^2 \\ \varphi(X+1) &= (X+1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (X+1) + 0 \cdot (X+1)^2 \\ \varphi((X+1)^2) &= 2(X+1)^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (X+1) + 2 \cdot (X+1)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $(A')^n$?

Comme A' est une matrice diagonale, on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A')^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. Justifier l'existence d'une matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$ et calculer cette matrice.

Par formule de changement de bases,

$$A' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP$$

avec

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n .

On peut commencer par montrer que

$$A = PA'P^{-1}$$

Puis, on démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P(A')^n P^{-1}$$

Or, on connaît P et les puissances de A' . De plus, on peut montrer (par exemple avec une méthode type pivot de Gauss) que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n - 2 \\ 0 & 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 20 – Montrer que les matrices suivantes sont semblables:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Alors par «lecture de la matrice», on a,

$$f(e_1) = -e_3, \quad f(e_2) = 0, \quad f(e_3) = e_1$$

Notons $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3$ et $e'_3 = e_2$. Alors,

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= f(e_1) = -e_3 = -e'_2 \\ f(e'_2) &= f(e_3) = e_1 = e'_1 \\ f(e'_3) &= f(e_2) = 0 \end{aligned}$$

et donc la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) est B . Ainsi, A et B sont les matrices d'un même endomorphisme et donc sont semblables.

$$2. C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à C . Alors D est la matrice de f dans la base $(4e_2, e_1, e_3)$.

$$3. E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à C . Alors D est la matrice de f dans la base (e_2, e_1, e_3) .