

DS 6

Lundi 11 mai 2026, durée : 3h

Consignes globales :

1. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. Les candidat-e-s sont invité-e-s à **encadrer** dans la mesure du possible leurs résultats.
3. Les **pages** doivent être **numérotées** en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)

Exercice 1 – Des développements limités en vrac.

Effectuer les développements limités suivants.

- a) De la fonction $x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$ en 0 à l'ordre 6.
- b) De la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} (e^x - x - \cos(x) - x^2)$ en 0 à l'ordre 2.
- c) De la fonction $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ en 0 à l'ordre 2.

Exercice 2 – Sujet de concours, filière ECT. Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 4 boules rouges tandis que l'urne U_2 contient deux boules rouges et deux boules blanches. On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne U_1 . Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne U_2 . On note F l'évènement «la pièce donne face». On définit également pour tout entier $k \geq 1$, l'évènement R_k : «le k -ième tirage dans l'urne choisie donne une boule rouge».

1. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue un tirage dans l'urne choisie. Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{3}{4}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité mais celui-ci ne doit pas remplacer un raisonnement rigoureux.
2. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue deux tirages dans l'urne choisie sans remise, c'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
 - (a) Calculer les deux probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2)$$

- (b) En déduire que la probabilité que le tirage donne deux boules rouges de suite est $\frac{7}{12}$.
 - (c) On remarque à posteriori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait donné pile ?
3. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue des tirages sans remise dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
 - (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\{1, 2, 3\}$.
 - (b) Expliquer pourquoi $[Y = 1] = F \cap \bar{R}_1$. En déduire $\mathbb{P}(Y = 1)$.
 - (c) Calculer de même $\mathbb{P}(Y = 2)$.
 - (d) Déduire alors des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}(Y = 3)$.
 - (e) Calculer l'espérance de Y .

Exercice 3 – Sujet de concours, banque PT. On pose en préambule quelques questions de cours.

Préambule : Questions de cours.

1. Soient A et B deux évènements. Donner la probabilité de l'évènement B grâce à la formule des probabilités totales dans le cas particulier où on considère le système complet d'évènements (A, \bar{A}) .
2. Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. Donner la formule de Bayes.
3. Soit X une variable aléatoire réelle. Donner la définition de l'espérance de X .
4. Soit X suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Donner l'espérance et la variance de X .
On ne demande pas de preuve.

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes.

- Le comportement de l'appareil au jour $n + 1$ ne dépend que de son état au jour n et pas aux jours précédents.
- Si l'appareil fonctionne le jour n , il a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être en panne le jour $n + 1$.
- Si l'appareil est en panne le jour n , il a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être réparé et de fonctionner le jour $n + 1$.

Formellement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et qui vaut 0 si l'appareil est en panne le jour n , on a,

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X_n = 1)$ et en particulier, on note p_1 la probabilité que l'appareil fonctionne le premier jour.

Partie 1 : Étude des variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Dans cette partie, on souhaite étudier la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. Calculer p_2 en fonction de p_1 .
6. Plus généralement, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_n$$

7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .
8. Quelle loi usuelle la variable aléatoire X_n suit-elle (pour $n \in \mathbb{N}^*$) ?
9. Donner la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie 2 : Étude d'une loi conjointe dans un cas particulier.

Pour toute la suite de cet exercice, on suppose que

$$p_1 = \frac{3}{5}$$

10. Donner la loi de X_2 dans ce cas particulier.
11. Calculer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) . *On pourra la représenter dans un tableau.*
12. Donner l'espérance et la variance de X_1 et de X_2 .
13. Calculer la covariance de X_1 et de X_2 .
14. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 – Dans cet exercice, on souhaite étudier une application linéaire particulière (définie plus bas). Mais en préambule, on pose quelques questions de cours.

Préambule : Questions de cours.

1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Donner la définition d'une famille libre (dans E).
2. Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Donner la définition d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$.
3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Définir le noyau de f , c'est-à-dire définir l'ensemble $\text{Ker } f$.
4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Énoncer le théorème du rang.

Dans toute la suite, on étudie maintenant $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$f((1, 0, 0)) = (-2, -5, -2)$$

$$f((0, 1, 0)) = (1, 2, 1)$$

$$f((0, 0, 1)) = (1, 3, 1)$$

Partie 1 : Étude de f .

5. Justifier que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (-2x + y + z, -5x + 2y + 3z, -2x + y + z)$$

6. Justifier que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
7. Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de f .
8. Donner une base de $\text{Ker } f$ et en déduire sa dimension.
9. L'application f est-elle injective? *Justifier.*
10. Construire un supplémentaire S de $\text{Ker } f$ dans \mathbb{R}^3 (justifier).
11. Donner le rang de l'application f .
12. Déterminer $\text{Im } f$, l'ensemble image de f .
13. Donner une base de $\text{Im } f$.
14. L'application f est-elle surjective? *Justifier.*
15. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Partie 2 : Étude des endomorphismes itérés.

16. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f^2(x, y, z)$ et $f^3(x, y, z)$.
17. En déduire l'expression de f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
18. Déterminer les ensembles $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ (on en donnera des bases).
19. Que valent les suites $(\dim(\text{Ker}(f^k)))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\dim(\text{Im}(f^k)))_{k \in \mathbb{N}}$?