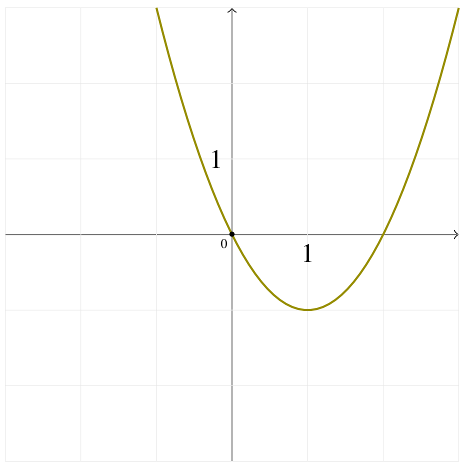
# TD 04 – Fonctions bijectives

## 1 Fonctions bijectives

**Exercice 1 – Représentation graphique.** La fonction représentée ci-dessous est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ? de $\mathbb{R}$ vers $[-1,+\infty[$ ? de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ ? de $[1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ ?




**Exercice 2 – Attention aux ensembles !.** On considère l'application

$$h: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h$ n'est pas bijective de $E$ vers $F$.
2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h$ n'est pas bijective de $E$ vers $F$.
3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application $h$ est bijective de $E$ vers $F$.

**Exercice 3 – Montrer la bijectivité et déterminer $f^{-1}$ (avec la méthode 1).**

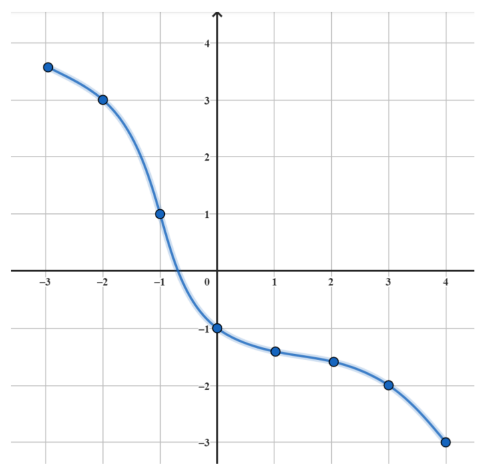
1. Soit
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & 3-\frac{1}{x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction $f$ est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et calculer $f^{-1}$.
2. Soit
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,1[ \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$$
Montrer que la fonction $f$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[-1,1[$ et calculer $f^{-1}$.
3. Soit
$$f: \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[ & \longrightarrow & [1,+\infty[ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+2x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction $f$ est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et calculer $f^{-1}$.

**Exercice 4 – À partir du tableau de variations.** On considère le tableau de variations suivant d'une fonction $f$, supposée continue. (Ici, les flèches montantes/descendantes désignent de la stricte croissance/décroissance.)

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $2$ | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |

1. Donner l'image directe $f(\mathbb{R})$, puis $f([1,2])$ et $f(]-\infty,1])$.
2. La fonction $f$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[-3,+\infty[$?
3. La fonction $f$ réalise-t-elle une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $\mathbb{R}$?
4. La fonction $f$ réalise une bijection de $[0,2]$ sur quel intervalle?
5. Justifier que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser. On note alors $\varphi$ sa bijection réciproque.
   (a) Que vaut $\varphi(0)$? $\varphi(1)$? $\varphi(2)$?
   (b) Quel est le sens de variation de $\varphi$ sur son domaine de définition?
   (c) Donner un encadrement de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Exercice 5 – Informations graphiques.** On considère la représentation graphique d'une fonction $f$ ci-dessous. On répondra aux questions directement par lecture graphique avec des valeurs approchées.




1. Que vaut $f([0,3])$?
2. La fonction $f$ réalise une bijection de quel intervalle sur quel intervalle? On note $g$ la bijection réciproque.
3. Expliquer comment obtenir la représentation graphique de $g$ et la tracer ci-contre.
4. Quel est le sens de variation de $g$?
5. Déterminer $g(-2)$ et $g(-1)$.
6. Déterminer $g([-1,3])$.

**Exercice 6 – Calcul d'images directes (sans stricte monotonie).** À l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau de variations, donner les images directes suivantes.

a) Pour $f: x\mapsto x^2$, que vaut $f([-1,2])$ ?

b) Pour $f: x\mapsto x^2$, que vaut $f(]-1,1])$ ?

c) Pour $f : x \mapsto 2x^2 - 8x + 6$, que vaut $f(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 7 – Calcul d'images directes (avec stricte monotonie).** Après avoir rapidement vérifier que les fonctions sont strictement monotones sur les intervalles considérés, déterminer les images directes données en calculant les valeurs/limites aux bornes de l'intervalle.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3])$ ?

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3[)$ ?

c) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-3,-1[)$ ?

d) Pour $f : x \mapsto x^3$, que vaut $f([0,+\infty[)$ ?

e) Pour $f : x \mapsto \ln(x)$, que vaut $f(]0,1[)$ ?

**Exercice 8 – Théorème de la bijection (méthode 2).** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $f : x \mapsto x\exp(x)$. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.
2. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

**Exercice 9 – Oral CCINP TSI 2023.** On pose,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\tan(x) - x$$

Montrer que $f$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle à déterminer et que sa bijection réciproque est impaire.

**Exercice 10 – Résolution d'une équation (méthode 3).** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que l'équation $x\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0,+\infty[$, puis que $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

**Exercice 11 – Dérivabilité de la fonction réciproque.** Soit $f : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
2. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $(f^{-1})'(1)$.

**Exercice 12 – Dérivabilité de la fonction réciproque.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto x\mathrm{e}^x$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$. Préciser l'équation de la tangente en $0$.
2. Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble $J$ à déterminer. On note $\varphi$ sa bijection réciproque.
3. Déterminer $\varphi(\mathrm{e})$.
4. Justifier que $\varphi$ est dérivable sur $J$ et calculer $\varphi'(\mathrm{e})$.

**Exercice 13 – Dérivabilité de la fonction réciproque.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; x \longmapsto x + \ln(x) + 2$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle $J$ à préciser. On note $f^{-1}$ la bijection réciproque, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
2. Dresser le tableau de variation de $f^{-1}$ en précisant les valeurs remarquables et les limites.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ au point $M$ d'abscisse $1$.
4. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation de la tangente $T'$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point $N$ d'abscisse $3$.
5. Construire sur un même graphique $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$, $T$ et $T'$.
6. Montrer que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x)}$$

## 2 Fonctions exponentielle et logarithme

**Exercice 14 – (In)équations avec $\ln$ et $\exp$.** Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\ln(x) = -7$ | ☐ | ☐ | $x \geqslant 1$ |
| $\exp(x) = 4$ | ☐ | ☐ | $x \leqslant \frac{1}{4}(\mathrm{e}^3+1)$ |
| $\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)$ | ☐ | ☐ | $\mathrm{e}^{-7}$ |
| $\mathrm{e}^{-3x+5} < 2$ | ☐ | ☐ | $x > -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{5}{3}$ |
| $\ln(4x-1) \leqslant 3$ | ☐ | ☐ | $\ln(4)$ |

**Exercice 15 – Calculs algébriques sur $\ln$ et $\exp$.** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

   a) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\ln(8) + 5\ln(2)$
   c) $\ln(\sqrt{32})$ d) $\ln(10) - \ln(20)$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^5 \times e^2 \times \mathrm{e}^{-3}$ b) $\mathrm{e}^3 \times (\mathrm{e}^{-4})^2$
   c) $\frac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}}$ d) $\frac{\mathrm{e} \times (\mathrm{e}^5)^7}{\mathrm{e}^{-9} \times \mathrm{e}^4}$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^{2\ln 3 + \ln 4}$ b) $\mathrm{e}^{3\ln 2 - \ln 4}$
   c) $\frac{\mathrm{e}^{\ln 6 + 1}}{\mathrm{e}^{\ln 9 + 2}}$ d) $\mathrm{e}^{3\ln 3} + \mathrm{e}^{2\ln 7}$
   e) $\mathrm{e}^{5\ln 3} \times \mathrm{e}^{4\ln 9}$ f) $\ln(1+\mathrm{e}^5) + \ln\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\right)$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

   a) $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}}$ b) $\frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$
   c) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}$ d) $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   e) $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{-x}$ f) $\frac{\mathrm{e}^{x^2-2x} \times (\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions $A$ et $B$ et factoriser les expressions $C$ (par $\mathrm{e}^{-4x}$) et $D$ (par $\mathrm{e}^x - 3x$).

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{e}^{2x}+5)^2 \\ B &= (\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{-x}+5) \\ C &= 5\mathrm{e}^{-4x} - 3\mathrm{e}^{-4x} + 7\mathrm{e}^{-4x} \\ D &= \mathrm{e}^{2x} - 9x^2 \end{aligned}$$