

## DS 6

Lundi 11 mai 2026, durée : 3h

Consignes globales :

1. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. Les candidat-e-s sont invité-e-s à **encadrer** dans la mesure du possible leurs résultats.
3. Les **pages** doivent être **numérotées** en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)

**Exercice 1 – Des développements limités en vrac.** Effectuer les développements limités suivants.

- a) De la fonction  $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$  en 0 à l'ordre 6.

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\sin(x)\cos(2x)} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5)\right) \\ &= \underset{x \rightarrow 0}{x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{120}} \\ &= \underset{x \rightarrow 0}{x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^6)}\end{aligned}$$

- b) De la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}(e^x - x - \cos(x) - x^2)$  en 0 à l'ordre 2.

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1}{x^2}(e^x - x - \cos(x) - x^2)} &= \frac{1}{x^2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - x^2\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\ &= \underset{x \rightarrow 0}{\frac{x}{6} + o(x^2)}\end{aligned}$$

c) De la fonction  $x \mapsto \sqrt{\cos x}$  en 0 à l'ordre 2.

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sqrt{\cos x}}_{x \rightarrow 0} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) + o \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &=_{x \rightarrow 0} \boxed{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} \end{aligned}$$

## Exercice 2 – Sujet de concours, filière ECT.

Cet exercice est adapté du sujet d'épreuves communes 2019, Maths T (l'énoncé du CB2 est fidèle mot pour mot à l'énoncé de base avec seulement une indication rajoutée à la question 1). Cet exercice, dans le sujet initial, comptait pour 16% de la note finale. Voici un extrait du rapport de jury concernant ce sujet de concours.

« De façon générale, on trouve beaucoup d'écritures incorrectes à base d'intersections ou de réunions de probabilités, d'égalités entre probabilités et événements. Les erreurs de calculs sur les fractions sont très nombreuses. »

« Les résultats intermédiaires étant souvent donnés, les tentatives d'escroquerie pour les obtenir à tout prix sont nombreuses. Elles sont bien sûr sanctionnées par les correcteurs. »

« Les calculs de deux questions successives peuvent aussi être incohérents sans que le candidat ne s'en émeuve. De même il n'est pas rare de rencontrer des candidats qui trouvent des probabilités supérieures à 1 voire négatives ! »

Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient 4 boules rouges tandis que l'urne  $U_2$  contient deux boules rouges et deux boules blanches.

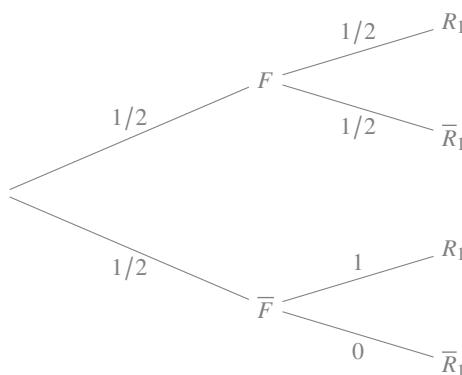
On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne  $U_1$ . Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne  $U_2$ .

On note  $F$  l'évènement «la pièce amène face». L'évènement «la pièce amène pile» est donc  $\bar{F}$ . On définit également pour tout entier  $k \geq 1$ , l'évènement  $R_k$  : «le  $k$ -ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge».

1. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **un** tirage. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est  $\frac{3}{4}$ . On pourra s'aider d'un arbre de probabilité mais celui-ci ne doit pas remplacer un raisonnement complet et rigoureux.

« Le système complet d'évènements est rarement cité dans la question 1. »

On peut représenter cette situation sur un arbre de probabilités à deux niveaux, dont le premier niveau concerne le lancer de pièce (on obtient pile ou face) et le deuxième niveau concerne le tirage d'une boule dans une urne (on obtient une boule rouge ou une boule pas rouge), sachant que le choix de l'urne est déterminé par le résultat du lancer de pièce à la première étape.



Les probabilités sur l'arbre s'expliquent de la manière suivante :

- La pièce n'est pas truquée : les résultats «pile» et «face» sont donc équiprobables d'où :

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\bar{F}) = \frac{1}{2}$$

- Si l'évènement  $F$  est réalisé (c'est-à-dire si on a obtenu Face au premier lancer, le tirage se fait dans l'urne 2 contenant 2 boules rouges et deux blanches. Les boules étant indiscernables, on obtient,

$$\mathbb{P}_F(R_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- De même,

$$\mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1) = \frac{4}{4} = 1$$

On cherche à déterminer  $\mathbb{P}(R_1)$ . Le système  $(F, \bar{F})$  forme un système complet d'événements. Donc, par la **formule de probabilités totales**, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(R_1)} &= \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(R_1) + \mathbb{P}(\bar{F}) \times \mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \boxed{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

2. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **deux** tirages *sans remise*, c'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.

- (a) Calculer

$$\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2)$$

Si l'évènement  $\bar{F}$  est réalisé (c'est-à-dire que l'on a obtenu Pile au lancer de pièce), on effectue les deux tirages sans remise dans l'urne 1 ne contenant que des boules rouges. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = 1}$$

Si l'évènement  $F$  est réalisé (c'est-à-dire que l'on a obtenu Face au lancer de pièce), on effectue les deux tirages sans remise dans l'urne 1 contenant deux boules rouges parmi quatre boules. Ainsi, en utilisant la **formule des probabilités composées**, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2)} = \mathbb{P}_F(R_1) \times \mathbb{P}_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

- (b) En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est  $\frac{7}{12}$ .

« De très nombreux candidats confondent probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection. »

On cherche à déterminer  $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$ . Le système  $(F, \bar{F})$  forme un système complet d'événements. Donc, par la **formule de probabilités totales**, on obtient,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\bar{F}) \times \mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2)$$

En utilisant les résultats de la question 2a, on obtient alors,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{7}{12}}$$

- (c) On remarque à posteriori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

On cherche à déterminer  $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})$ . D'après la **formule de Bayes**,

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\bar{F}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{F}) \times \mathbb{P}_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

En utilisant les résultats des questions 2a et 2b, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \boxed{\frac{6}{7}}$$

3. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **des** tirages *sans remise* dans l'urne **jusqu'à** ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(a) Justifier que l'ensemble  $Y(\Omega)$  des valeurs prises par  $Y$  est égal à  $\{1, 2, 3\}$ .

- Si la première boule tirée est blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 (car l'urne 1 ne contient pas de boule blanche). Dans ce cas,  $Y = 1$  car il n'aura fallu qu'un seul tirage pour déterminer dans quelle urne on est.
- Si la première boule tirée est rouge et la deuxième blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 (car l'urne 1 ne contient pas de boule blanche). Dans ce cas,  $Y = 2$  car il aura fallu deux tirages pour déterminer dans quelle urne on est.
- Si les deux premières boules tirées sont rouges et la troisième est blanche, de même  $Y = 3$  (et on est dans l'urne 2).
- Si les deux premières boules tirées sont rouges et la troisième est rouge, alors on est dans l'urne 1 (car l'urne 2 ne contient que deux boules rouges et le tirage se fait sans remise, on ne peut donc pas tirer trois boules rouges de suite) et alors  $Y = 3$ .

On arrive donc à déterminer au bout de trois tirages maximum dans quelle urne on est (et dans certains cas, on peut le savoir plus tôt). Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$$

(b) Expliquer pourquoi  $[Y = 1] = F \cap B_1$ . En déduire  $\mathbb{P}(Y = 1)$ .

« La justification de l'égalité  $[Y = 1] = F \cap B_1$  est rarement convaincante. »

L'évènement  $Y = 1$  signifie que l'on arrive à déterminer dans quelle urne on est avec seulement un tirage.

- Si la première boule est rouge, on ne sait pas dans quelle urne on est.
- Si la première boule est blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 et donc que l'on avait obtenu pile au lancer de pièce préalable.

Donc, la seule manière de savoir dans quelle urne on est avec seulement un seul tirage est d'avoir eu pile au lancer de pièce puis d'avoir tiré une boule blanche d'où

$$[Y = 1] = F \cap B_1$$

Ainsi, par la **formule des probabilités composées**, on a,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(F \cap B_1) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

(c) Calculer de même  $\mathbb{P}(Y = 2)$ .

En reprenant les explications données à la question 3a, on peut montrer que

$$[Y = 2] = F \cap \overline{B_1} \cap B_2$$

Donc, en utilisant de nouveau la **formule des probabilités composées**, on a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(F \cap \overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}_{F \cap \overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(d) Déduire alors des questions précédentes la valeur de  $\mathbb{P}(Y = 3)$ .

Comme  $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$  (cf question 3a), on sait que

$$\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) = 1$$

Donc, en utilisant les résultats des questions 3b et 3c, on en déduit que,

$$\mathbb{P}(Y = 3) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

(e) Justifier que  $Y$  admette une espérance et la calculer.

La variable aléatoire  $Y$  est une variable aléatoire **finie**. Elle admet donc une espérance donnée par,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^3 k \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \times \mathbb{P}(Y = 2) + 3 \times \mathbb{P}(Y = 3) \\ &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

**Exercice 3 – Sujet de concours, banque PT.** On pose en préambule quelques questions de cours.

**Préambule : Questions de cours.**

1. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements. Donner la formule des probabilités totales dans le cas particulier où on considère le système complet d'évènements  $(A, \bar{A})$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Alors, en considérant le système complet d'évènements  $(A, \bar{A})$ , on a,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

2. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements de probabilités non nulles. Donner la formule de Bayes.

Si  $A$  et  $B$  sont des évènements de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

3. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Donner la définition de l'espérance de  $X$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire finie sur  $\Omega$ . On appelle **espérance** de  $X$  le réel suivant, noté  $E(X)$ ,

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

4. Soit  $X$  suivant une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ . Donner l'espérance et la variance de  $X$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$ . Son espérance et sa variance valent alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

« Enfin, le niveau moyen des candidats est particulièrement inquiétant, le raisonnement mathématique étant remplacé dans beaucoup de copies par une dissertation philosophique, voire une invocation ésotérique. »

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes.

- Le comportement de l'appareil au jour  $n+1$  ne dépend que de son état au jour  $n$  et pas aux jours précédents.
- Si l'appareil fonctionne le jour  $n$ , il a une probabilité  $\frac{1}{3}$  d'être en panne le jour  $n+1$ .
- Si l'appareil est en panne le jour  $n$ , il a une probabilité  $\frac{1}{2}$  d'être réparé et de fonctionner le jour  $n+1$ .

Formellement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si l'on appelle  $X_n$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour  $n$  et 0 si l'appareil est en panne le jour  $n$ , on a,

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$$

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = P(X_n = 1)$  et en particulier, on note  $p_1$  la probabilité que l'appareil fonctionne le premier jour.

**Partie 1 : Étude des variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .**

Dans cette partie, on souhaite étudier la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

5. Calculer  $p_2$  en fonction de  $p_1$ .

La famille  $(X_1 = 1, X_1 = 0)$  forme un système complet d'évènements. Ainsi, d'après la **formule des probabilités totales**, on a,

$$\begin{aligned} p_2 &= P(X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) \\ &= p_1 \times \frac{2}{3} + (1 - p_1) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_1 \end{aligned}$$

6. Plus généralement, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_n$$

« Il suffisait d'appliquer la formule des probabilités totales (pour un système d'évènements composé de deux évènements seulement) pour obtenir cette relation. Malheureusement, cette formule n'est pas énoncée correctement dans beaucoup de copies. »

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La famille  $(X_n = 1, X_n = 0)$  forme un système complet d'évènements. Ainsi, d'après la **formule des probabilités totales**, on a,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 1) \times P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 0) \times P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) \\ &= p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_n \end{aligned}$$

7. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et de  $p_1$ .

« Obtenir l'expression générale des termes d'une suite arithmético-géométrique est ensuite d'une difficulté extrême pour beaucoup de candidats ! »

D'après la question précédente, la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une **suite arithmético-géométrique**.

- On commence par résoudre l'équation de point-fixe :

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{3}{5}$$

- Puis, on considère la suite auxiliaire  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = p_n - \frac{3}{5}$$

On remarque que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{5} \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_n - \frac{3}{5} \\&= -\frac{1}{10} + \frac{1}{6}p_n \\&= -\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\left(q_n + \frac{3}{5}\right) \\&= \frac{1}{6}q_n\end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une **suite géométrique** de raison  $1/6$  et de premier terme

$$q_1 = p_1 - \frac{3}{5}$$

Donc son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Finalement, le terme général de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = q_n + \frac{3}{5} = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}}$$

8. Quelle loi usuelle la variable aléatoire  $X_n$  suit-elle (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ) ?

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La variable aléatoire  $X_n$  ne prend que deux valeurs : 0 ou 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli. De plus, la probabilité du «succès» est donné par

$$P(X_n = 1) = p_n = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$$

Ainsi,

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)}$$

9. En déduire la limite de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

*« Enfin, pour qu'une suite de la forme  $p^n$  tende vers 0, il ne suffit pas d'avoir  $\rho < 1$  ! De même, on peut s'interroger lorsque l'on obtient une probabilité qui tend vers  $+\infty$ . »*

On a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$$

Or

$$-1 < \frac{1}{6} < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$$

Puis, par opérations sur les limites, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{5}}$$

**Partie 2 : Étude d'une loi conjointe dans un cas particulier.**

Pour toute la suite de cet exercice, on suppose que

$$p_1 = \frac{3}{5}$$

10. Donner la loi de  $X_2$  dans ce cas particulier.

D'après la question 8,

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_2)$$

Or, d'après la question 5, on a,

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_1$$

Ainsi, si  $p_1 = \frac{3}{5}$ , on a,

$$p_2 = \frac{3}{5}$$

et donc,

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{5}\right)$$

11. Calculer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ . On pourra la représenter dans un tableau.

« La notion de loi d'un couple de variables aléatoires n'est pas du tout maîtrisée. »

On peut calculer grâce à la **formule des probabilités composées** que

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

On calcule de même tous les autres probabilités, ce que l'on résume dans le tableau suivant.

$X/Y$	0	1
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

12. Donner l'espérance et la variance de  $X_1$  et de  $X_2$ .

Comme  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(3/5)$ , on a direct que

$$E(X_1) = \frac{3}{5}$$

et

$$V(X_1) = \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

De même, comme  $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(3/5)$  (cf question 10),

$$E(X_2) = \frac{3}{5}$$

et

$$V(X_2) = \frac{6}{25}$$

13. Calculer la covariance de  $X_1$  et de  $X_2$ .

« Parmi les trop rares candidats ayant obtenu la loi du couple, seule une poignée sont en mesure de calculer correctement la covariance des variables. »

Par définition,

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

Or, d'après la question précédente,

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{3}{5}$$

De plus, par **formule de transfert** (en s'aidant de la loi conjointe trouvée à la question 11), on obtient,

$$E(X_1 X_2) = 0 \times 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times 1 \times \frac{1}{5} + 1 \times 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

D'où

$$\boxed{\text{cov}(X_1, X_2)} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{1}{25}}$$

**14. Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.**

Si  $X_1$  et  $X_2$  étaient indépendantes, alors  $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$ . Comme, on a montré que  $\text{cov}(X_1, X_2) \neq 0$ , cela prouve que  $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

**Exercice 4** – Dans cet exercice, on souhaite étudier une application linéaire particulière (définie plus bas). Mais en préambule, on pose quelques questions de cours.

**Préambule : Questions de cours.**

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Donner la définition d'une famille libre (dans  $E$ ).

Soient  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$  des éléments de  $E$ . On dit que la famille  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$  est **libre** (ou que les vecteurs  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$  sont **linéairement indépendants**) si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \text{si } \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{x}_p = \vec{0}_E \quad \text{alors} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i = 0$$

Dire qu'une famille est libre signifie qu'aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

2. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Donner la définition d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ .

On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est une **application linéaire** (ou **morphisme**) si elle préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y})$$

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

3. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Définir le noyau de  $f$ , c'est-à-dire définir l'ensemble  $\text{Ker } f$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **noyau** de l'application  $f$  l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = 0_F\} \subset E$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par l'application  $f$ .

4. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Énoncer le théorème du rang.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose  $E$  de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Dans toute la suite, on étudie maintenant  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire telle que

$$f((1, 0, 0)) = (-2, -5, -2)$$

$$f((0, 1, 0)) = (1, 2, 1)$$

$$f((0, 0, 1)) = (1, 3, 1)$$

**Partie 1 : Étude de  $f$ .**

5. Justifier que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (-2x + y + z, -5x + 2y + 3z, -2x + y + z)$$

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= f(x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)) \\ &= x \cdot f((1, 0, 0)) + y \cdot f((0, 1, 0)) + z \cdot f((0, 0, 1)) && \text{par linéarité de } f \\ &= x \cdot (-2, -5, -2) + y \cdot (1, 2, 1) + z \cdot (1, 3, 1) \\ &= (-2x + y + z, -5x + 2y + 3z, -2x + y + z) \end{aligned}$$

6. Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

- La fonction  $f$  est une application linéaire (d'après l'énoncé).
- L'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes :  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ .

Donc, l'application  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**7. Déterminer  $\text{Ker } f$ , le noyau de  $f$ .**

Soit  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \text{Ker } f &\iff f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -5x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{redondante}) \\ &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = z(1,1,1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1,1))$$

**8. Donner une base de  $\text{Ker } f$  et en déduire sa dimension.**

La famille  $((1,1,1))$  est génératrice de  $\text{Ker}(f)$  par construction (cf question précédente). De plus, elle est libre car elle contient un unique vecteur qui n'est pas le vecteur nul. Donc, la famille  $((1,1,1))$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ . On en déduit donc que

$$\dim(\text{Ker } f) = 1$$

**9. L'application  $f$  est-elle injective ? Justifier.**

On peut remarquer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1,1)) \neq \{(0,0,0)\}$$

Donc l'application  $f$  n'est pas injective.

**10. Construire un supplémentaire  $S$  de  $\text{Ker } f$  dans  $\mathbb{R}^3$  (justifier).**

On a démontré que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1,1))$$

Posons

$$S = \text{Vect}((1,0,0), (0,1,0))$$

Montrons que  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- Montrons que  $S \cap \text{Ker } f = \{(0,0,0)\}$ . Soit  $u \in S \cap \text{Ker } f$ .
  - D'une part,  $u \in S$ , donc,

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad u = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,1,0) = (a,b,0)$$

- D'autre part,  $u \in \text{Ker } f$ , donc,

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad u = c \cdot (1,1,1) = (c,c,c)$$

En combinant ces deux informations, on obtient,

$$u = (c,c,c) = (a,b,0)$$

Par identification des coordonnées, on obtient  $c = a = b = 0$  puis  $u = (0,0,0)$ . Ceci conclut la preuve.

- Montrons que  $\dim(S) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^3)$ . On a déjà justifié que

$$\dim(\text{Ker } f) = 1$$

De plus, on sait que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Enfin, la famille  $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$  est une famille génératrice de  $S$  et une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de  $S$ , ainsi,

$$\dim(S) = 2$$

On a donc bien

$$\dim(S) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi,

$$S = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

est un  $\boxed{\text{supplémentaire de Ker } f \text{ dans } \mathbb{R}^3}$ .

**11. Donner le rang de l'application  $f$ .**

D'après le théorème du rang, on a,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$$

Donc, en utilisant la question 8,

$$\boxed{\text{rg}(f)} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker } f) = 3 - 1 = \boxed{2}$$

**12. Déterminer  $\text{Im } f$ , l'ensemble image de  $f$ .**

Notons  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Par propriété de l'image, on a (en notant les vecteurs en colonne) :

$$\boxed{\text{Im } f} = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{car } f(e_1) = -f(e_2) - f(e_3).$$

**13. Donner une base de  $\text{Im } f$ .**

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est génératrice de  $\text{Im } f$  par construction. De plus, cette famille est libre (car elle contient deux vecteurs non colinéaires). C'est donc une  $\boxed{\text{base de Im } f}$ . *Remarque : On aurait aussi pu raisonner à partir de la dimension de l'image trouvée à la question précédente.*

**14. L'application  $f$  est-elle surjective ? Justifier.**

À la question 11, on a montré que  $\dim(\text{Im } f) = 2$ . Ainsi, comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , on peut remarquer que

$$\dim(\text{Im } f) \neq \dim(\mathbb{R}^3) \quad \text{et donc} \quad \text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$$

Donc, l'application  $f$  n'est pas surjective.

15. A-t-on  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  ?

On a démontré dans les questions précédentes que

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 3, 1))$$

On peut remarquer que

$$u = (1, 1, 1) = 2(1, 2, 1) - (1, 3, 1) \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

Donc,

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{(0, 0, 0)\}$$

La somme  $\text{Ker } f + \text{Im } f$  n'est pas directe et donc,

$$\mathbb{R}^3 \neq \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

## Partie 2 : Étude des endomorphismes itérés.

16. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $f^2(x, y, z)$  et  $f^3(x, y, z)$ .

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a,

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= (\dots) \\ &= (-3x + y + 2z, -6x + 2y + 4z, -3x + y + 2z) \end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned} f^3(x, y, z) &= f^2(f(x, y, z)) \\ &= (\dots) \\ &= (-3x + y + 2z, -6x + 2y + 4z, -3x + y + 2z) \end{aligned}$$

17. En déduire  $f^k(x, y, z)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Comme  $f^3 = f^2$  (cf question précédente), par récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \geq 2, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f^k(x, y, z) = f^2(x, y, z) = (-3x + y + 2z, -6x + 2y + 4z, -3x + y + 2z)$$

Listons les cas non compris dans cette égalité :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f^0(x, y, z) = (x, y, z) \quad (\text{convention})$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f^1(x, y, z) = f(x, y, z) = (-2x + y + z, -5x + 2y + 3z, -2x + y + z) \quad (\text{question 5})$$

18. Déterminer les ensembles  $\text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f^2$  (on en donnera des bases).

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker } f^2 &\iff f^2(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -6x + 2y + 4z = 0 & \text{(redondante car c'est } 2L_1) \\ -3x + y + 2z = 0 & \text{(redondante car c'est } L_1) \end{cases} \\ &\iff -3x + y + 2z = 0 \\ &\iff (x, y, z) = (x, 3x - 2z, z) = x(1, 3, 0) + z(0, -2, 1).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{Ker } f^2 = \text{Vect}((1, 3, 0), (0, -2, 1))}$$

et on justifie comme précédemment que la famille  $\boxed{((1, 3, 0), (0, -2, 1))}$  est une base de  $\text{Ker } f$ .  
Ensuite, par propriété de l'image, on a :

$$\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

On a donc,

$$\boxed{\text{Im}(f^2) = \text{Vect}((1, 2, 1))}$$

et on justifie comme précédemment que la famille  $\boxed{((1, 2, 1))}$  est une base de  $\text{Im } f$ .

19. Que valent les suites  $(\dim \text{Ker } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\dim \text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ?

Sans oublier  $f^0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  (donc  $\text{Ker } f^0 = \{0\}$  et  $\text{Im } f^0 = \mathbb{R}^3$ ), on a :

$$\boxed{(\dim \text{Ker } f^k)_{k \in \mathbb{N}} = (0, 1, 2, 2, 2, \dots) \quad \text{et} \quad (\dim \text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}} = (3, 2, 1, 1, 1 \dots)}.$$