

COLLES 29 & 30 - Du 01/06 au 05/06 & du 08/06 au 12/06

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 29 - Applications Linéaires

- Notion d'application linéaire, notion d'endomorphisme, de forme linéaire
- Identité, homothétie de rapport λ
- Détermination d'une application linéaire par la donnée des images des vecteurs d'une base, détermination d'une application linéaire par la donnée sur deux espaces supplémentaires
- Notion du noyau d'une application linéaire, lien avec l'injectivité
- Notion d'image d'une application linéaire, lien avec la surjectivité, rang
- Théorème du rang
- Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée, puissance
- Notion d'isomorphisme, d'automorphisme, espaces isomorphes
- Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les notions d'injectivité, de bijectivité et de surjectivité coïncident

NOTE IMPORTANTE POUR LES COLLEURS/COLLEUSES: La représentation matricielle d'une application linéaire n'a pas été vue dans ce chapitre et sera traitée ultérieurement.

Chapitre 30 - Variables Aléatoires Finies

- Notion de variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, loi conditionnelle d'une variable aléatoire
- Transformation d'une variable aléatoire
- Espérance (définition, propriétés, théorème de transfert), variance (définition, formule de Koenig-Huygens, propriétés), écart-type
- Lois usuelles finies (définition, espérance, variance) : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale
- Couples de variables aléatoires : loi conjointe, loi marginales, covariance, indépendance
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebuev

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- Donner la définition d'une application linéaire (Chap 29 - Définition 1.1)
 - Donner la définition du noyau $\ker f$ d'une application linéaire (Chap 29 - Définition 2.2)
 - Donner la définition de l'ensemble image $\text{Im } f$ d'une application linéaire (Chap 29 - Définition 3.1, deuxième point)
 - Énoncer le théorème du rang (Chap 29 - Proposition 3.14)
-
- Donner les caractéristiques (support, valeurs des probabilités, espérance et variance) d'une loi uniforme (Chap 30 - Définition 3.1)
 - Donner les caractéristiques (support, valeurs des probabilités, espérance et variance) d'une loi de Bernoulli (Chap 30 - Définition 3.4)
 - Donner les caractéristiques (support, valeurs des probabilités, espérance et variance) d'une loi binomiale (Chap 30 - Définition 3.6)

Un exercice :

- Montrer que l'application f suivante est linéaire (Chap 29 - Exemple 1.3)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y, -x - y)$$

- Soit $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] ; P \longmapsto P'$. Déterminons le noyau de f . (Chap 29 - Exemple 2.5)
- Déterminer une base de l'image de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par (Chap 29 - Exemple 3.6)

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

-
- On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. Donner la loi de X . (Chap 30 - Exemple 1.6)
 - Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Calculer l'espérance de $V = U^2$ de deux manières différentes : (Chap 30 - Exemple 2.9)

- a) en déterminant la loi de V puis son espérance
 - b) grâce au théorème de transfert
- On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second dé. On définit la variable aléatoire S par $S = X + Y$. Déterminer $P(S = 8)$. (Chap 30 - Exemple 6.6)