

0. Quelques règles de calculs

Ce chapitre comprend des rappels sur les **identités remarquables**, les **fractions**, les **puissances** et la **racine carrée**. On y rappelle les principales règles de calcul à connaître sans hésitation.

*Les **identités remarquables** ne sont pas toujours bien connues. Quant aux **racines carrées**... $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{12}$ ne sont pas toujours remplacées par 1, 2 et $2\sqrt{3}$. Aussi, $(\sqrt{3})^2$ n'est pas toujours égal à 3... Les solutions de l'équation $X^2 = \alpha$ (avec $\alpha > 0$) se limitent régulièrement à $\sqrt{\alpha}$.*

*Les auteurs des sujets se réservent la possibilité pour les futures sessions de prévoir dans le barème une pénalité pour les candidats qui ne simplifient pas les **fractions** (ainsi que les **racines carrées**), avec une tolérance pour les lois de probabilités où toutes les probabilités pourront être laissées au même dénominateur (le plus petit possible).*

1 Les identités remarquables

Proposition 1.1 Soient a, b deux réels. On a les *identités remarquables* suivantes :

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

En cas de doute (ce qui arrive plus souvent qu'on peut le penser), deux réflexes sont bons à avoir en tête.

- On peut essayer de **prouver** le résultat qui nous intéresse.

Preuve de la a). On a,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

■

- On peut **tester sur des exemples** la formule que l'on pense être vraie. Attention, cette méthode est moins fiable que la précédente (car cela ne constitue pas une preuve), mais elle est plus abordable.

Exemple 1.2 La formule suivante est-elle vraie ?

Pour tout a, b réels, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Si on teste pour $a = b = 1$, on obtient $4 = 2$... On peut formaliser cette manière de faire grâce à un **raisonnement par l'absurde**. Supposons par l'absurde que la formule soit vraie, c'est à dire que

Pour tout a, b réels, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Alors, en prenant $a = b = 1$, on obtient

$$4 = 2$$

Ceci est absurde. Donc la formule est fausse.

Exemple 1.3 Déterminer les réels a et b qui vérifient

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

Raisonnons **par équivalence**. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 = a^2 + b^2 &\Leftrightarrow ab = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0\end{aligned}$$

2 Les fractions

Proposition 2.1 — Simplification. Soient a, b et c trois nombres réels, tels que a et c soient non nuls. On a

$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}.$$

Autrement dit, on ne modifie pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.



Attention aux simplifications abusives... Par exemple, on ne peut *pas* simplifier un terme en commun dans une *addition* en haut et en bas d'une fraction :

$$\frac{a+b}{a+c} \neq \frac{b}{c}.$$

Par exemple,

$$\frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}.$$

Proposition 2.2 — Addition/Soustraction. Soient a et b deux nombres réels et c un nombre réel non nul. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$



Pour additionner deux fractions, il est nécessaire que le dénominateur des deux fractions soit le même. Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord mettre les fractions *au même dénominateur* avant de les *additionner*.

Proposition 2.3 — Multiplication. Soient a, b deux nombres réels et c, d deux nombres réels non nuls. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Proposition 2.4 — Fraction de deux fractions. Soit a un nombre réel et b, c, d trois nombres réels non nuls. On a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$



Pensez à bien aligner correctement les traits de fractions quand il y en a plusieurs, cela peut changer le résultat.... Par exemple :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{10}{3} \quad \text{alors que} \quad \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$$

Exercice 2.5 Calculer la fraction suivante :

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Exercice 2.6 Soit x un réel non nul. Écrire la fraction suivante comme une somme de fractions :

$$\frac{\frac{1}{3} \left(x + \frac{6}{x} \right)}{x} = \frac{1}{3} \left(x + \frac{6}{x} \right) \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{6}{x^2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2}$$

3 Les puissances

Définition 3.1 — Puissances positives. Pour tout entier naturel non nul n et a réel,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Lorsque $n = 0$, par convention, pour tout a réel, on a $a^0 = 1$.

Exercice 3.2 Calculer les puissances suivantes.

a) $2^2 = 4$

b) $2^0 = 1$

c) $-3^2 = -9$

d) $(-3)^2 = 9$

et

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définition 3.3 — Puissances négatives. Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exercice 3.4 Calculer les puissances suivantes.

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$

c) $-4^{-2} = -\frac{1}{16}$

d) $(-4)^{-2} = \frac{1}{16}$

Proposition 3.5 — Règles de calcul sur les puissances. Soient a, b des réels non nuls et n, m des entiers.

1. Multiplication de puissances : $a^n \times a^m = a^{n+m}$.
2. Puissance d'une puissance : $(a^n)^m = a^{n \times m}$.
3. Fraction de puissances : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
4. Produit de puissances : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.
5. Puissance d'une fraction : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Démonstration. Démontrons la règle sur la multiplication de puissances. Soient a un réel et n, m des entiers. Pour se simplifier la tâche, on suppose que n et m sont positifs. D'après la Définition 3.1, on a,

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

■

Exercice 3.6 Soient x, y deux nombre réel. Simplifier les expressions suivantes.

1. $x^2 \times x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x^{2+3} = x^5$

2. $(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x \times x \times x \times x \times x \times x = x^{2 \times 3} = x^6$

3. $\frac{2^7}{2^5} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2^{7-5} = 2^2 = 4$

4. $(xy^2)^2 = (x \times y^2)^2 = x^2 \times (y^2)^2 = x^2 \times y^{2 \times 2} = x^2 y^4$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27}$

Exercice 3.7 Simplifier l'expression suivante :

$$\left(\frac{2(xy)^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2y^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2}{y}\right)^4 = \frac{16x^8}{y^4}$$

4 La racine carrée

Définition 4.1 Lorsque a est un réel positif, la racine carrée de a est l'unique réel positif x tel que $x^2 = a$. On le note $\sqrt{a}$. On a donc

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Proposition 4.2 — Règles de calcul sur les racines carrées. Soient a et b des entiers positifs.

- Multiplication de racines : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
- Fraction de racines : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemple 4.3 La formule suivante est-elle vraie ?

$$\text{Pour tout } a, b \text{ réels positifs,} \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Par exemple, pour $a = b = 1$,

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{alors que} \quad \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2.$$

Donc la formule est fausse...

Proposition 4.4 — Racine carrée d'un carré. Soit a un nombre réel. On a :

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4.5 Calculer les racines suivantes :

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt{(-4)^2} = 4$$

? Pour simplifier des racines carrées, il s'agit donc de repérer des facteurs carrés sous la racine.

Exercice 4.6 Simplifier les racines suivantes :

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$