

Fiche n° 1. Forme canonique

Réponses

1.1 a) $4x^2 + 12x + 9$

1.1 b) $9y^2 - 24y + 16$

1.1 c) $u^2 - 2\sqrt{7}u + 7$

1.1 d) $3t^2 + 6\sqrt{5}t + 15$

1.1 e) $\frac{9}{4}z^2 + 6z + 4$

1.1 f) $\frac{4}{25}v^2 - \frac{8}{15}v + \frac{4}{9}$

1.2 a) $(x-5)(x+5)$

1.2 b) $(2t-3)(2t+3)$

1.2 c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

1.2 d) $(u+3)^2$

1.2 e) $(3v-2)^2$

1.2 f) $(\sqrt{2}z+5)^2$

1.3 a) $\{0\}$

1.3 b) $\{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$

1.3 c) $\{-5\}$

1.3 d) $\{\sqrt{2}\}$

1.3 e) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

1.3 f) $\left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$

1.4 a) $X^2 - 6X + 16$

1.4 b) $2X^2 + 12X + 13$

1.4 c) $-X^2 - 2\sqrt{2}X + 4$

1.4 d) $4\sqrt{3}X^2 - 4\sqrt{3}X - \sqrt{3}$

1.4 e) $\frac{3}{4}X^2 + \frac{3}{4}X + \frac{19}{16}$

1.4 f) $\frac{5}{18}X^2 + \frac{10}{9}X + \frac{8}{9}$

1.5 a) $(X+1)^2 + 1$

1.5 b) $(X+2)^2 - 5$

1.6 a) $-(X-2)^2 - 1$

1.6 b) $4(X-1)^2 - 7$

1.6 c) $-9(X-2)^2 + 40$

1.6 d) $-2(X+5)^2 + 33$

1.7 a) $\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - 2$

1.7 b) $\frac{1}{4}(X+2)^2 - 2$

1.7 c) $\frac{2}{9}(X+18)^2 - \frac{503}{7}$

1.7 d) $-\frac{9}{8}\left(X + \frac{2}{9}\right)^2 - \frac{71}{18}$

1.7 e) $\frac{1}{2}\left(X + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{36}$

1.7 f) $-\frac{4}{5}\left(X + \frac{25}{48}\right)^2 - \frac{2\,581}{4\,032}$

1.8 a) $\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \lambda$

1.8 b) $\frac{1}{4}(X+2\lambda)^2 - \lambda^2 - 2$

1.8 c) $\lambda\left(X + \frac{4}{\lambda}\right)^2 - \frac{16}{\lambda} + 5$

1.9 a) $-3\left(X + \frac{\lambda}{6}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{12} + 2$

Fiche n° 4. Polynômes I

Réponses

4.1 a)	$-\frac{5}{6}$	4.6 b)	$-18(1 + 6\sqrt{2})$
4.1 b)	$\frac{67}{30}$	4.6 c)	0
4.1 c)	$\frac{31}{6}$	4.7 a)	$X^4 - X^3 - X + 1$
4.1 d)	$-\frac{1}{45}$	4.7 b)	$-2X^2 - X + 20$
4.1 e)	$\frac{2}{3}$	4.7 c)	$\frac{2}{3}X^2 + 5X - \frac{73}{10}$
4.1 f)	$-\frac{1}{40}$	4.8 a)	$-2 + 19X - 39X^2 + 9X^3 + 7X^4 - 2X^5$
4.2 a)	$(a, b) = \left(\frac{5}{7}, \frac{1}{7}\right)$	4.8 b)	$\frac{3}{2} - \frac{11}{8}X - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{4}X^3 - X^4 + 2X^5$
4.2 b)	$(a, b, c) = (1, -3, 2)$	4.8 c)	$1 + X^4$
4.3 a)	-63	4.9 a)	$7 + 8X$
4.3 b)	0	4.9 b)	$7 + 8X$
4.3 c)	0	4.9 c)	$1 - 2X + 6X^2$
4.3 d)	-110	4.10 a)	$3 - 6X + 4X^2$
4.3 e)	25	4.10 b)	$-1 - X + X^2 - X^3 + 2X^4 + X^6$
4.4 a)	$\frac{10}{9}$	4.10 c)	$12X + 31X^2 + 45X^3 + 30X^4 + 9X^5 + X^6$
4.4 b)	$\frac{181}{2}$	4.11 a)	$-\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 4)X + (6 - 2\sqrt{2})X^2 + 2\sqrt{2}X^3$
4.4 c)	$-\frac{163}{3}$	4.11 b)	$-1 + 3X - 3X^2 + X^3$
4.4 d)	$-\frac{178}{27}$	4.12 a)	$1 + (6 + \sqrt{3})X^2 + 2X^4$
4.4 e)	$\frac{367}{45}$	4.12 b)	$18\sqrt{2} - 28 + (26 - 18\sqrt{2})X^2 + (6\sqrt{2} - 9)X^4 + 2X^6$
4.5 a)	165	4.13 a)	non
4.5 b)	$-\frac{35}{6}$	4.13 b)	oui
4.6 a)	0	4.13 c)	oui
		4.13 d)	non
		4.14 a)	$m = \frac{1}{8}$
		4.14 b)	$m = 1$

Fiche n° 8. Dérivation III

Réponses

- 8.1 a) $\frac{7}{12}x - \frac{7}{3}y + \frac{1}{3}z$
- 8.1 b) $\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y - \frac{1}{4}z$
- 8.1 c) $\frac{14}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{13}{15}z$
- 8.1 d) $\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z$
- 8.2 a) $2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$
- 8.2 b) $\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}$
- 8.2 c) $-6x^2 + 11x - 6$
- 8.2 d) $-3x^2 + x - \frac{1}{16}$
- 8.3 a) $6(2x - 1)^2$
- 8.3 b) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} - 2\right)^3$
- 8.3 c) $-5(1 - x)^4$
- 8.3 d) $\frac{6}{(1 - 2x)^4}$
- 8.4 a) $12(\sqrt{3} + \sqrt{2}x)^5$
- 8.4 b) $-9\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{6}x\right)^2$
- 8.4 c) $\frac{-24}{(6 - x)^4}$
- 8.4 d) $\frac{6}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}x)^3}$
- 8.5 a) $(4x - 5)(1 - 2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
- 8.5 b) $4(2x - 1)(3x + 2)^3(9x - 1)$
- 8.6 a) $12x(x - \sqrt{2})^3(2x + \sqrt{2})$
- 8.6 b) $\frac{5}{3}(2x + 7)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x}{3} + 2\right)$
- 8.7 a) $-\frac{1}{(1 - 3x)^2}$
- 8.7 b) $-\frac{(2x + 7)(1 - x)^2}{(2x + 1)^3}$
- 8.8 a) $-\frac{(1 - 2x)^5(4x - 5)}{(x - 1)^3}$
- 8.8 b) $-\frac{2(\sqrt{2}x + 2)^2(2\sqrt{2}x - 5)}{(1 - \sqrt{2}x)^2}$
- 8.9 a) $4x + \frac{2}{2x + 1} + 2$
- 8.9 b) 5
- 8.9 c) $x + \frac{1}{x - 1} - 1$
- 8.9 d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- 8.10 a) $\frac{4(2x + 1)}{3 + (2x + 1)^2}$
- 8.10 b) $\frac{8\sqrt{2}}{11}$
- 8.10 c) $\frac{2x - 2}{3 + (1 - x)^2}$
- 8.10 d) $\frac{1}{2}$
- 8.11 a) $\frac{1}{9}\sqrt{2x^2 + 4x + 11}$
- 8.11 b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 8.11 c) $-2\sqrt{2x^2 - 8x + 9}$
- 8.11 d) -6
- 8.12 a) $y = 5x - 2$

Fiche n° 10. Généralités sur l'exponentielle II

Réponses

10.1 a) $(x-4)(x+4)$	10.3 d) $\exp(0) = 1$	10.8 a) $x \geq \frac{7}{2}$
10.1 b) $(x+3)^2$	10.3 e) $\exp(10)$	10.8 b) $-\frac{5}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}$
10.1 c) ... $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$	10.3 f) $\exp(15)$	10.8 c) $x < \frac{1}{2}$
10.1 d) $(2x-1)(2x+1)$	10.4 a) $\exp(-x)$	10.8 d) $x \geq \frac{2}{7}$
10.1 e) $(x+3)(x+5)$	10.4 b) $\exp(3x)$	10.9 a) $x = 0$
10.1 f) $(3x-8)(3x+4)$	10.4 c) $\exp(x-1)$	10.9 b) $x = 0$
10.2 a) $\frac{21}{8}$	10.4 d) $\exp(2x)$	10.9 c) $x = 0$
10.2 b) $\frac{14}{5}$	10.5 4	10.9 d) $x = 0$ ou $x = 1$
10.2 c) $\frac{6}{5}$	10.6 a) $x = -4$	10.10 $(x, y) = (1, -1)$
10.2 d) 7	10.6 b) $x > 3$	10.11 a) courbe 3
10.2 e) $\frac{1}{10}$	10.6 c) $x = 1$ ou $x = -1$	10.11 b) courbe 1
10.2 f) $-\frac{9}{4}$	10.6 d) $x \leq \frac{1}{5}$	10.11 c) aucune
10.3 a) $\exp(5)$	10.6 e) $x = 0$	10.11 d) courbe 2
10.3 b) $\exp(3)$	10.6 f) $x = -\frac{1}{2}$	10.12 $\textcircled{b}$
10.3 c) $\exp(1) = e$	10.7 a) $0 < x < 5$	10.13 $\frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x}$
	10.7 b) $x \geq \frac{3}{2}$	10.14 $\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$
	10.7 c) $x > 0$	10.15 oui
	10.7 d) $x < \frac{1}{2}$	

Corrigés

10.1 c) On a $2x^2 - \frac{1}{2} = 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

10.1 d) On a $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$.

10.1 e) On a $(x+3)^2 + 2x + 6 = (x+3)(x+3) + 2(x+3) = (x+3)(x+3+2) = (x+3)(x+5)$.

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a).....	$\frac{1}{12}$	1.3 d).....	$\frac{1}{9}$	1.7 c).....	$\frac{3}{2}n$
1.1 b).....	$\frac{a+b}{ab}$	1.4 a).....	$\frac{247}{24}$	1.8.....	$\frac{n^3+n}{n+1}$
1.1 c).....	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	1.4 b).....	$\frac{203}{24}$	1.9 a).....	$4 + \frac{5}{6}$
1.1 d).....	$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$	1.4 c).....	$\frac{-10}{3}$	1.9 b).....	$1 + \frac{1}{k-1}$
1.2 a).....	$\frac{4}{5}$	1.4 d).....	1 000	1.9 c).....	$3 + \frac{5}{x-2}$
1.2 b).....	2^5	1.5.....	$\frac{16}{35}$	1.10.....	$2t$
1.2 c).....	3	1.6 a).....	2 022	1.11 a).....	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
1.2 d).....	$-2 \times 3^{3k-2}$	1.6 b).....	$\frac{1}{2}$	1.11 b).....	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
1.3 a).....	$\frac{1}{6}$	1.6 c).....	1	1.11 c).....	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$
1.3 b).....	$\frac{7}{15}$	1.6 d).....	2	1.12.....	Non
1.3 c).....	9	1.7 a).....	$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	1.13.....	$A > B$
		1.7 b).....	$-\frac{ab}{a-b}$		

Corrigés

1.1 a) Un dénominateur commun est $3 \times 4 = 12$. On a : $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

1.1 b) Un dénominateur commun est $a \times b$. On a : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$.

1.1 c) On a : $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

1.1 d) On a : $x + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1} = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$.

1.2 a) $\frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$

1.2 b) $8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.2 c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$

1.2 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.3 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

1.3 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.3 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.3 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.4 a) On développe :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ = 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

1.4 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5}\right) \times \frac{7}{8} \\ = \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.4 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.4 d) On calcule :

$$\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)} \\ = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} \\ = 1\,000.$$

1.5 On calcule :

$$\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ = \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.6 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Donc : } \frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + (1-2\,022) \times (1+2\,022)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + 1 - 2\,022^2} = 2\,022.$$

1.6 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2} &= \frac{2\,021^2}{(2\,021 - 1)^2 + (2\,021 + 1)^2 - 2} \\ &= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 + 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 - 2} \\ &= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1} = \frac{2\,021}{2\,021 - 2 + 2\,021 + 2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.6 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$.

Donc : $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a+1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$

1.6 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 2a + 2$.

Donc : $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a+2}{a(a+2) - (a-1)(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

1.7 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.7 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

1.7 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

1.8

$$\text{De } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ on a : } \frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

1.9 a) On trouve $\frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$.

1.9 b) On trouve $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$.

1.9 c) On trouve $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$.

1.10 Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

$$\text{Donc, } AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t.$$

1.11 a) $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$

1.11 c) $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$

1.12 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.13 On ré-écrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a).....	10^8	2.2 b).....	5^{-6}	2.3 b).....	$2^{21} \cdot 3$	2.5 a).....	$\frac{x}{x+1}$
2.1 b).....	10^{15}	2.2 c).....	2^7	2.3 c).....	2	2.5 b).....	$\frac{1}{x-2}$
2.1 c).....	10^2	2.2 d).....	$(-7)^{-2}$	2.3 d).....	$2^{38} \cdot 3^{26}$	2.5 c).....	$\frac{2x}{x+1}$
2.1 d).....	10^{-2}	2.2 e).....	3^5	2.4 a).....	8	2.5 d).....	$\frac{2}{x-2}$
2.1 e).....	10^4	2.2 f).....	3^{28}	2.4 b).....	11		
2.1 f).....	10^{-8}	2.3 a).....	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	2.4 c).....	3^{10}		
2.2 a).....	15^4			2.4 d).....	$2^6 \cdot 5$		

Corrigés

2.3 a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3 + 1) \cdot 3^{21}}{(3 - 1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

- 3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$
- 3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$
- 3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$
- 3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
- 3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$
- 3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$
- 3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$
- 3.2 b) $-28 + 21x$
- 3.2 c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$
- 3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$
- 3.2 e) $1 + x^4$
- 3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$
- 3.3 a) $-6(6x + 7)$
- 3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$
- 3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$
- 3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$
- 3.4 a) $(x - 1)^2$
- 3.4 b) $(x + 2)^2$
- 3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$
- 3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$
- 3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$
- 3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$
- 3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$
- 3.5 b) $3(14x + 3y)(-4x + y)$
- 3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$
- 3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$
- 3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$
- 3.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$
- 3.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
- 3.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$
- 3.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- 3.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
- 3.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) = (x^2-1)(x^3-1) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7)$$

3.3 b) On calcule $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = \dots$

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$.

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right]$.

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right]$.

3.5 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

3.5 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2 + 2x + 1) = (x+y)(x+1)^2$.

3.6 a) On calcule $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$.

3.6 b) On calcule $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64 = -8(x^2 + 1)[9x^2 - 24 - 8(x^2 - 1)] = -8(x^2 + 1)(x-4)(x+4)$.

3.6 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2 + x + 1 = 0$ et $x^2 - x + 1 = 0$, n'ont pas de solutions réelles.

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a).....	$\boxed{5}$	4.3 a)	$\boxed{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}$	4.5 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{x-1}}$
4.1 b).....	$\boxed{\sqrt{3} - 1}$	4.3 b)	$\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$	4.5 d)	$\boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}}$
4.1 c).....	$\boxed{-\sqrt{3} + 2}$	4.3 c).....	$\boxed{1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}}$	4.5 e)	$\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
4.1 d).....	$\boxed{\sqrt{7} - 2}$	4.3 d)....	$\boxed{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}$	4.5 f)	$\boxed{-4(x-1)^2}$
4.1 e).....	$\boxed{\pi - 3}$	4.3 e)	$\boxed{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$	4.6 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$
4.1 f).....	$\boxed{ 3 - a }$	4.3 f)	$\boxed{-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}}$	4.6 b)	$\boxed{2\sqrt{2}}$
4.2 a)	$\boxed{20}$	4.3 g).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$	4.7 a).....	$\boxed{-11 + 5\sqrt{5}}$
4.2 b)	$\boxed{9 + 4\sqrt{5}}$	4.3 h)	$\boxed{50 - 25\sqrt{3}}$	4.7 b).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{3}}$	4.4	$\boxed{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$	4.7 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 d).....	$\boxed{3 + \sqrt{2}}$	4.5 a).....	$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$	4.7 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
4.2 e).....	$\boxed{12\sqrt{7}}$	4.5 b).....	$\boxed{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	4.7 e).....	$\boxed{1 + \sqrt{5}}$
4.2 f).....	$\boxed{12}$			4.7 f)	$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}$
4.2 g).....	$\boxed{9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}}$			4.8	$\boxed{1}$
4.2 h)	$\boxed{10}$				

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3 - a|$, c'est-à-dire $3 - a$ si $a \leq 3$ et $a - 3$ si $a \geq 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{2^2 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x + 2f(x)} = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2 - 1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A - 1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$ d'inconnue t , puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a).....	$(x^2 + 1)^2$.	5.3 a).....	$7a^2 + 12a + 7$	5.6 f).....	31
5.1 b).....	$(2x - 1)(2x + 1)$.	5.3 b).....	$a^2 - 1$	5.7 a).....	$a^2 + 2$
5.1 c).....	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.	5.3 c).....	$4a^2 - a - 3$	5.7 b).....	$a^3 + 3a$
5.1 d).....	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.	5.3 d).....	$-a^2 + 1$	5.7 c).....	$a^4 + 4a^2 + 2$
5.1 e).....	$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.	5.4 a).....	$8 + 6i$	5.8 a).....	$a^2 - 2b$
5.1 f).....	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.	5.4 b).....	$8 - 6i$	5.8 b).....	$ab - 3c$
5.2 a).....	$x = -\frac{1}{3}$.	5.4 c).....	$18 - 26i$	5.8 c).....	$a^3 - 3ab + 3c$
5.2 b).....	$x = 3$.	5.4 d).....	$-9 - 46i$	5.8 d).....	$ab - c$
5.2 c).....	$x = 0$ ou $x = -1$.	5.5 a).....	$39 - 18i$	5.8 e).....	ac
5.2 d).....	$x = 1$ ou $x = -1$.	5.5 b).....	2197	5.8 f).....	$-2ac + b^2$
5.2 e).....	$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.	5.5 c).....	$-4 + 43i\sqrt{5}$	5.9 a).....	$a^2b - ac - 2b^2$
5.2 f).....	$x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.	5.5 d).....	1	5.9 b)...	$a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$
		5.6 a).....	3	5.9 c).....	0
		5.6 b).....	1	5.9 d).....	1
		5.6 c).....	1	5.9 e).....	a
		5.6 d).....	0		
		5.6 e).....	-1		

Corrigés

- 5.1 a)** On reconnaît une identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, avec $a = x^2$ et $b = 1$.
- 5.1 b)** On utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 2x$.
- 5.1 c)** Identité à savoir, c'est le binôme de Newton. On reconnaît les coefficients du triangle de Pascal (1, 3, 3, 1).
- 5.1 d)** Utiliser la formule pour $(a + b)^3$, le signe $-$ alterne en apparaissant là où les puissances de b sont impaires.
- 5.1 e)** Comme 1 est racine, on peut factoriser par $x - 1$. Le facteur manquant se trouve à la main. Les plus affûtés reconnaissent $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$ (somme géométrique).
- 5.1 f)** Quand $a = b$, l'expression s'annule. On cherche donc à factoriser par $a - b$. Le facteur manquant se trouve à la main.
- 5.2 a)**
- 5.2 b)**

5.2 c) On a : $x^2 + x = 0 \iff x(x+1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.

5.2 d) On a : $x^2 = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x+1)(x-1) = 0$.

5.2 e)

5.2 f)

5.3 a) On développe $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

5.3 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - 1) = a^5 - a^3$ et donc $a^5 - a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2 - 1$.

5.3 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

5.3 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\frac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\frac{1}{a^2} = 1 - a$.

5.4 a) On développe : $(3+i)^2 = 9 + 6i + i^2$.

5.4 b) On développe : $(3-i)^2 = 9 + 6(-i) + (-i)^2 = 9 - 6i + i^2$.

5.4 c) D'après le calcul précédent : $(3-i)^3 = (8-6i)(3-i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2$.

5.4 d) On développe directement : $(3-2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2(2i)^1 + 3 \cdot 3^1(2i)^2 - (2i)^3$.

5.5 a) On développe : $24 - 30i + 12i - 15i^2$.

5.5 b) En remarquant que $(2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3 .

5.5 c) On développe : $(-4 + i\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3 \cdot 4^2(i\sqrt{5}) - 3 \cdot 4^1(i\sqrt{5})^2 + (i\sqrt{5})^3 = -64 + 48i\sqrt{5} + 60 - 5i\sqrt{5}$.

5.5 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.6 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

5.6 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, etc. et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.6 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.6 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\frac{a^5 - 1}{a - 1}$.

5.6 e) Cette somme géométrique vaut $\frac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \frac{a^{100} - a}{a - 1} = \frac{1 - a}{a - 1} = -1$.

5.6 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$