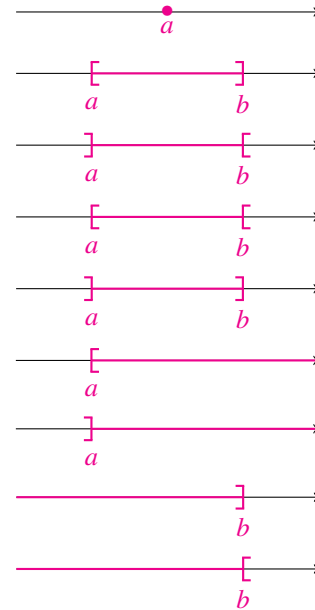


1. Étude qualitative d'une fonction

Pour bien démarrer : les intervalles de $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tout a et b dans I , $[a, b] \subset I$. De façon imagée, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie «sans trous». Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont l'ensemble vide $\emptyset$, l'ensemble $\mathbb{R}$ et les ensembles suivants avec a et b deux réels tels que $a < b$:

- les singletons : $\{a\}$
- les intervalles fermés ou segments : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- les intervalles ouverts : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- les intervalles fermés en a , ouverts en b : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- les intervalles ouverts en a , fermés en b : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- les demi-droites fermées en a : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- les demi-droites ouvertes en a : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- les demi-droites fermées en b : $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- les demi-droites ouvertes en b : $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



Exercice 0.1 Compléter le tableau suivant.

Notation d'intervalle	Inégalité(s) correspondante(s)	Représentation sur une droite
$x \in [-3, 5]$	$-3 \leq x \leq 5$	
$x \in] - \infty, 3[$	$x < 3$	
$x \in [4, 6[$	$4 \leq x < 6$	
$x \in [2, +\infty[$	$x \geq 2$	
$x \in] - 3, -1]$	$-3 < x \leq -1$	
$x \in] - \infty, 5]$	$x \leq 5$	
$x \in] - 1, 1[$	$-1 < x < 1$	

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1 Le **domaine de définition** d'une fonction f , souvent noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des réels x tels que le nombre $f(x)$ existe. On dit alors que f est définie sur $\mathcal{D}_f$, et on note

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$



Ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont deux objets de nature mathématique différente.

Objet	Nature mathématique
f	Une fonction
$f(2)$	Un nombre réel
$f(x)$ (pour un x fixé)	Un nombre réel

Ainsi, écrire «la fonction $f(x)$...» n'a pas de sens car $f(x)$ n'est pas une fonction, c'est l'image de x par la fonction f , et donc est un nombre réel. On écrira plutôt «la fonction f ...» ou la fonction « $x \mapsto f(x)$...».

On pourra utiliser la proposition suivante pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée.

Proposition 1.2 Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe} \Leftrightarrow g(x) \neq 0 & \text{b) } \sqrt{f(x)} \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 & \text{c) } \ln(f(x)) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) > 0 \end{array}$$



Étant donnée une fonction f , on commencera toujours par préciser son ensemble de définition si celui-ci n'est pas donné. Pour déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f , il s'agit de résoudre une ou plusieurs (in)équations selon les contraintes données en Proposition 1.2.

Exemple 1.3 Donner le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4} & \text{b) } x \mapsto \sqrt{x-3} & \text{c) } x \mapsto \ln(2-x) \\ \text{d) } x \mapsto \ln(x^2-6x+9) & \text{e) } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \end{array}$$

Fonction	Contrainte	$\mathcal{D}_f$
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$	$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \text{ et } x \neq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
$x \mapsto \sqrt{x-3}$	$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$	$[3, +\infty[$
$x \mapsto \ln(2-x)$	$2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$	$] -\infty, 2[$
$x \mapsto \ln(x^2-6x+9)$	$x^2-6x+9 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$	$] -1, +\infty[$

Définition 1.4 Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est à valeurs dans A si

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in A$$

On note alors souvent

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathcal{D}_f \rightarrow A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 1.5 Compléter le tableau suivant.

Fonction	Ensemble de définition	À valeurs dans
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$

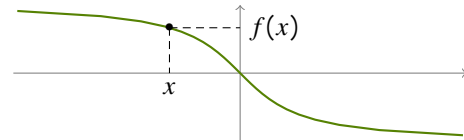
1.2 Représentation graphique

Définition 1.6 La **représentation graphique** d'une fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, notée $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, dans un repère orthonormé. Ainsi,

M de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$

Si $y = f(x)$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, on dit que

- y est l'**image** de x par f ,
- x est un **antécédent** de y .



Exemple 1.7 Ci-dessous est représentée la courbe d'une fonction f .

- Déterminer l'image de 2 par f .

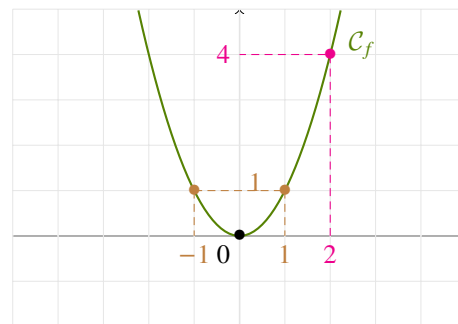
L'image de 2 par f est 4.

- Déterminer l'image de 0 par f .

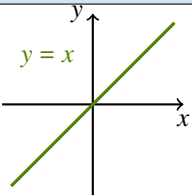
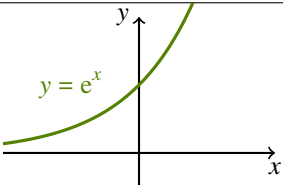
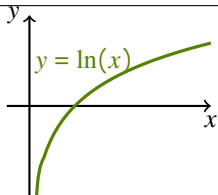
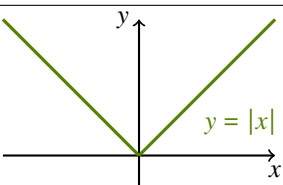
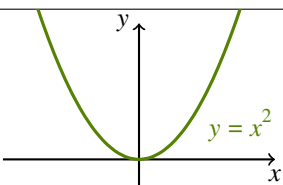
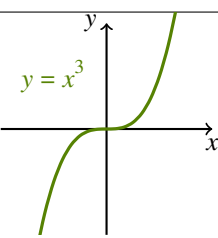
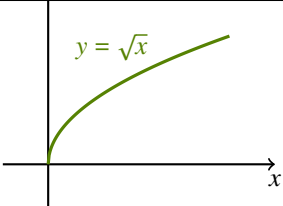
L'image de 0 par f est 0.

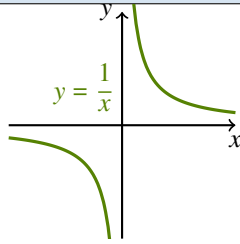
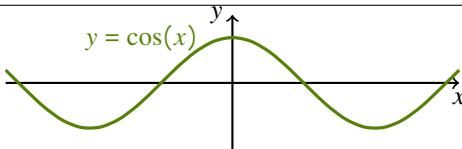
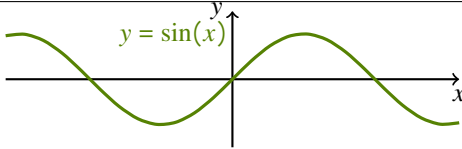
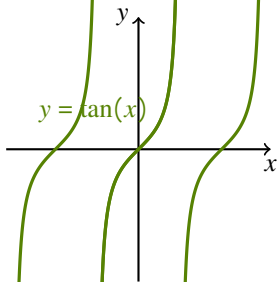
- Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par f .

L'élément 1 admet deux antécédents par f qui sont 1 et -1.



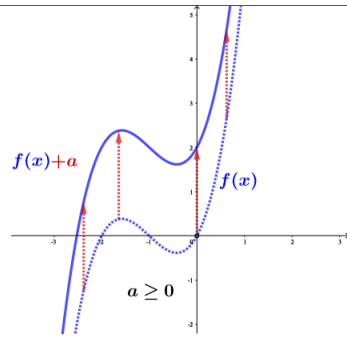
Ci-dessous, on rappelle les ensembles de définition et les représentations graphiques des fonctions usuelles.

Nom de la fonction	Notation	Représentation graphique
Identité	$\begin{array}{ccc} \text{id} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle	$\begin{array}{ccc} \text{exp} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$	
Logarithme (népérien)	$\begin{array}{ccc} \ln : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$	
Valeur absolue	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Carré	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$	
Cube	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$	
Racine carrée	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$	

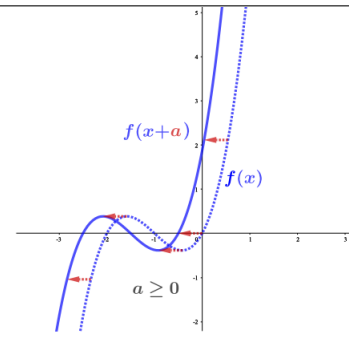
Nom de la fonction	Notation	Représentation graphique
Inverse	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$	
Cosinus	$\begin{array}{ccc} \cos : \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$	
Sinus	$\begin{array}{ccc} \sin : \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$	
Tangente	$\begin{array}{ccc} \tan : \mathcal{D}_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$ où $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	

1.3 Transformations affines d'une représentation graphique

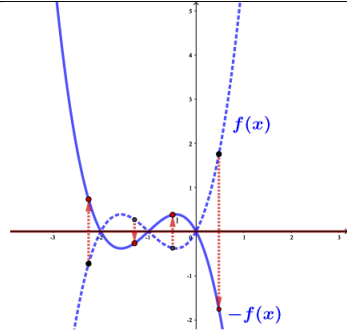
Voyons graphiquement les représentations graphiques de fonctions obtenues par des transformations simples à partir de la représentation graphique d'une fonction f représentée en pointillés.



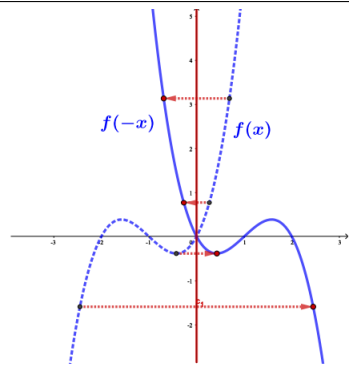
Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ est **translaté verticalement** vers le haut si $a \geq 0$ et vers le bas si $a \leq 0$.



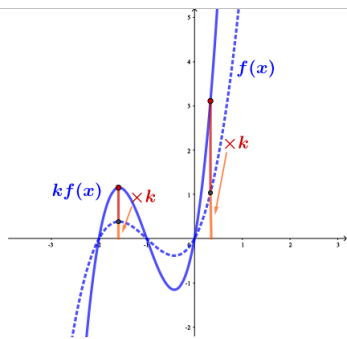
Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ est **translaté horizontalement** vers la gauche si $a \geq 0$ et vers la droite si $a \leq 0$.



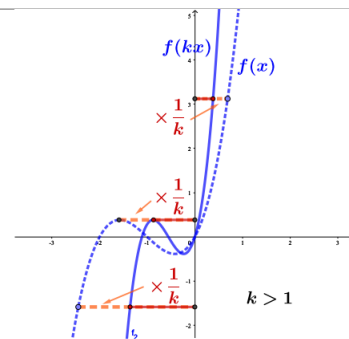
Le graphe de $x \mapsto -f(x)$ est obtenu par **symétrie** par rapport à l'**axe des abscisses**.



Le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est obtenu par **symétrie** par rapport à l'**axe des ordonnées**.

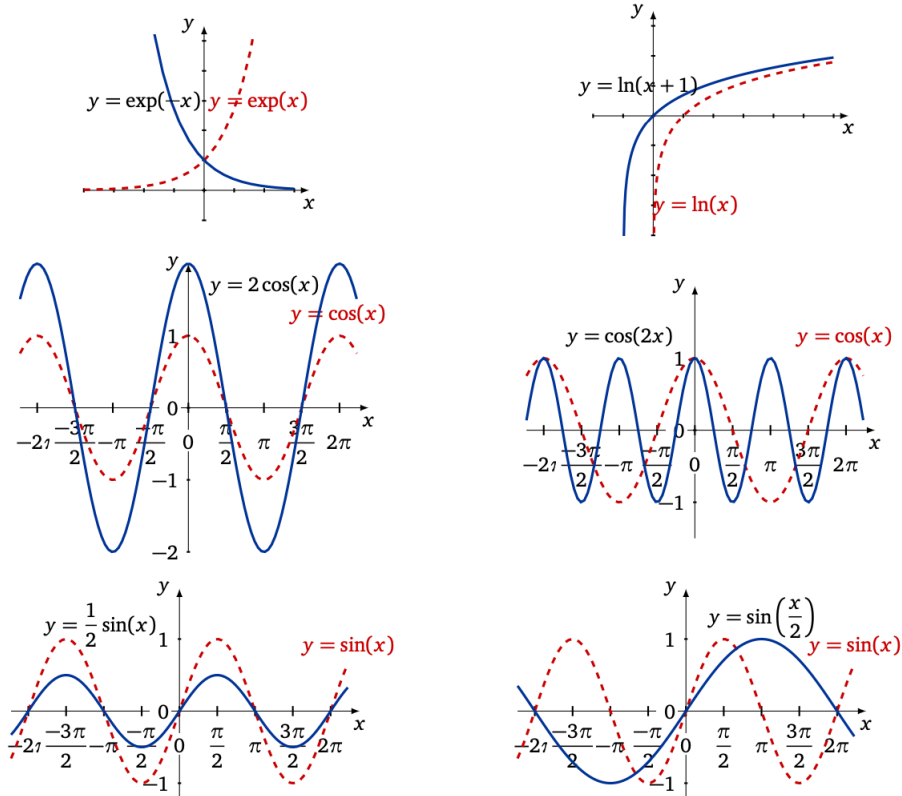


Le graphe de $x \mapsto kf(x)$ est obtenu par **dilatation verticale** de rapport k : le point (x, y) devient (x, ky) . Pour $k \in [0, 1[$, la courbe s'aplatit verticalement et s'élargit verticalement si $k > 1$.



Le graphe de $x \mapsto f(kx)$ est obtenu par **dilatation horizontale** de rapport $1/k$: le point (x, y) devient $((1/k)x, y)$. Pour $k \in [0, 1[$, la courbe s'aplatit horizontalement et s'élargit horizontalement si $k < 1$.

Exemple 1.8 Donner les fonctions dont les représentations graphiques sont tracées en trait continu à partir de celles tracées en pointillés ($v = \dots$ correspond à la fonction représentée en pointillés).



1.4 Opérations sur les fonctions

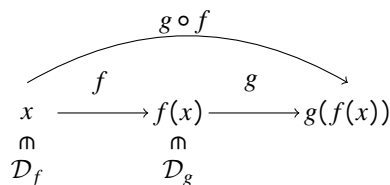
Proposition 1.9 Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom	Notation	Définition
Somme de f et g	$f + g$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit de f et g	$f \cdot g$ ou fg	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$
Produit de f et λ	λf	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Quotient de f et g^*	$\frac{f}{g}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

* Le quotient de f et g est bien défini que si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

Proposition 1.10 — Composition de fonctions. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Alors la **composée** $g \circ f$ (se lit “ g rond f ”) est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, donnée par

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$





Avec les notations de la Proposition précédente, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$. La fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathcal{D}_g$ seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g(x) \in \mathcal{D}_f$. De plus, lorsque les deux fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies, en général, elles ne sont pas égales.

Exemple 1.11 Soient f et g les fonctions données par

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

Déterminer si les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ existent et les déterminer le cas échéant.

Tout d'abord la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^$.
Déterminons maintenant les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$ quand ces fonctions existent.*

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

2 Rappels sur la dérivée

Le but de cette section est de se re-familiariser avec le **calcul de dérivées**, sans rentrer dans les détails de la théorie. La rédaction des exemples peut donc manquer de rigueur qui sera rajoutée par la suite.

2.1 Dérivées usuelles

$\mathcal{D}_f$	Fonction f	$\mathcal{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	$x \mapsto k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
Dépend de α	$x \mapsto x^\alpha$	Dépend de α	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
$[-1, 1]$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$] -1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1, 1]$	$x \mapsto \arccos(x)$	$] -1, 1[$	$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{ch}(x)$

2.2 Opérations sur les dérivées

Somme	$(u + v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Exemple 2.1 Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

Fonction	Dérivée
$x \mapsto x^2 + \cos(x) + 1$	$x \mapsto 2x - \sin(x)$
$x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	$x \mapsto 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \ln(x) \times e^x$	$x \mapsto \frac{1}{x} \times e^x + \ln(x) \times e^x$
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	$x \mapsto -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$	$x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2}$
$x \mapsto \sqrt{x}(5x-3)$	$x \mapsto \frac{15x-3}{2\sqrt{x}}$

2.3 Dérivée d'une composée

Proposition 2.2 — Dérivée d'une composée. Soient f une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_g$. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Les formes les plus courantes de dérivées de composées sont les suivantes.

Fonction	Dérivée
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Fonction	Dérivée
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$

Exemple 2.3 Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

Fonction	Dérivée
$x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$	$x \mapsto \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}}$
$x \mapsto (6x^2 + 3x + 7)^3$	$x \mapsto 3(12x + 3)(6x^2 + 3x + 7)^2$
$x \mapsto \cos(2x + 1)$	$x \mapsto -2\sin(2x + 1)$
$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
$x \mapsto \ln(2x + 1)$	$x \mapsto \frac{2}{2x+1}$

Exemple 2.4 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(2x + 3)$$

Donner la dérivée de h .

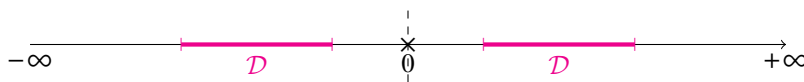
On a,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 2 \times g'(2x + 3)$$

3 Parité/Imparité et Périodicité

Définition 3.1 Une partie de $\mathbb{R}$ est dite **symétrique par rapport à zéro** lorsque

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D}.$$



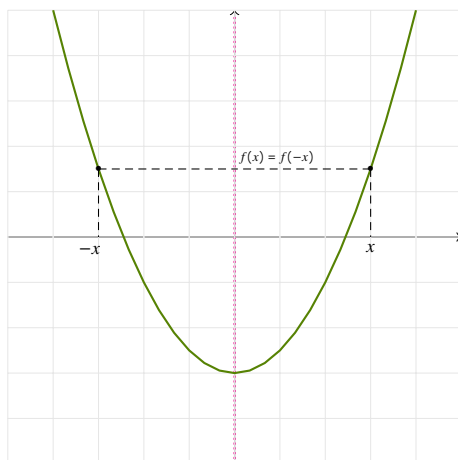
Exemple 3.2

Ensemble	$\mathbb{R}^*$	$] -1, 1]$	$] -5, 5 [$	$[-4, -2] \cup [2, 4]$	$] -\infty, -4] \cup [4, 9]$
Sym. % à 0	Oui	Non	Oui	Oui	Non

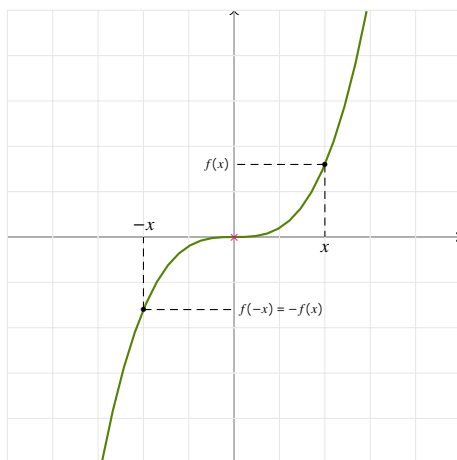
Définition 3.3 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro. On dit que :

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$,
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Cette notion, présentée ici dès le début de la première année, fait l'objet de la première question du sujet de concours Maths C, de 2020, de la banque PT...



Représentation d'une fonction *paire* (ici $x \mapsto x^2$) : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Représentation d'une fonction *impaire* (ici $x \mapsto x^3$) : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

? Comment étudier la *parité* (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$?

- Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0, alors f n'est pas paire.
- Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, alors
 - pour prouver que f est *paire*, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
 - pour prouver que f n'est *pas* *paire*, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire on trouve un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$.

On peut aussi tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction pour conjecturer la parité de la fonction.

Exercice 3.4 Montrer que la fonction suivante est impaire :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^5}{x^4 + 3x^2 + 1}$$

- La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ ne s'annule jamais.
- Son ensemble de définition, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^5}{(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{-x^5}{x^4 + 3x^2 + 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.5 Montrer que la fonction suivante est ni paire ni impaire.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x + 1$$

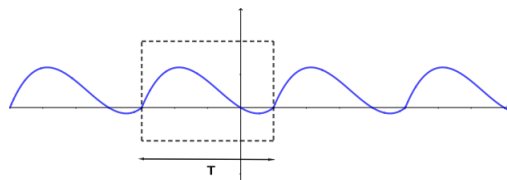
- La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).
- On a $f(2) = 7$ et $f(-2) = 3$. Comme $f(2) \neq f(-2)$, la fonction n'est pas paire.
- Et comme $f(2) \neq -f(-2)$, la fonction n'est pas impaire non plus.

Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Définition 3.6 — Périodicité. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T > 0$. On dit que f est **T -périodique** si,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

Le nombre T est alors appelé **période**.



Exemple 3.7 On considère la fonction f suivante

$$f : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?

On peut remarquer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + 1 \geq 1 > 0$$

Donc, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est π -périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$f(x + \pi) = \frac{\cos(2(x + \pi))}{\cos^2(x + \pi) + 1} = \frac{\cos(2x + 2\pi)}{(-\cos(x))^2 + 1} = \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1} = f(x).$$

Donc, la fonction f est π -périodique.

3. Montrer que f est paire.

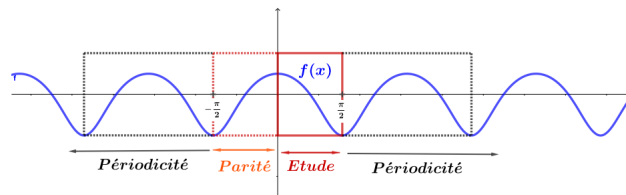
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{\cos^2(-x) + 1} = \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1} = f(x).$$

Donc, la fonction f est paire.

4. En déduire un domaine possible d'étude de f .

À priori, le domaine d'étude de f est $\mathbb{R}$ (son domaine de définition). Cependant, la fonction f étant π -périodique, on peut restreindre son étude à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (ou $[0, \pi]$). De plus, la fonction f est paire. On peut donc restreindre le domaine d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



4 Monotonie

4.1 Définition de la monotonie

Définition 4.1 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **constante** si

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) = f(y)$$

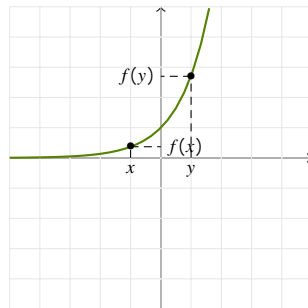
ou de manière équivalente,

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = C$$

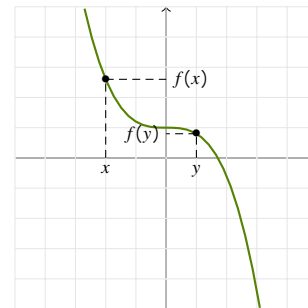
Définition 4.2 Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle de $\mathcal{D}_f$. On dit que f est

Vocabulaire	Définition
croissante sur I si	pour tout $(x, y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
strictement croissante sur I si	pour tout $(x, y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
décroissante sur I si	pour tout $(x, y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
strictement décroissante sur I si	pour tout $(x, y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

On dit que f est (strictement) *monotone* sur I si elle est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I .



Représentation d'une fonction *croissante* sur $\mathbb{R}$,
ici $x \mapsto \exp(x)$.



Représentation d'une fonction *décroissante* sur $\mathbb{R}$,
ici $x \mapsto -\frac{2}{10}x^3 + 1$.

Proposition 4.3 — Opérations sur les fonctions monotones. Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I .

- Si f et g sont croissantes sur I (resp. décroissantes) alors $f + g$ est croissante sur I (resp. décroissante).
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
 - Si $a > 0$ alors f et af ont le même sens de variation.
 - Si $a < 0$ alors f et af ont des sens de variation contraires.
- On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur I .
 - Si f et g ont la même monotonie alors $f \circ g$ est croissante.
 - Si f et g ont des monotonies opposées alors $f \circ g$ est décroissante.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I . Montrons que $f + g$ est une fonction croissante sur I . Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$. Comme f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(y).$$

En sommant les deux inégalités, on obtient

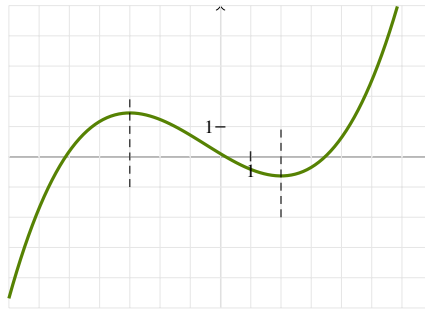
$$f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y),$$

c'est-à-dire

$$(f + g)(x) \leq (f + g)(y).$$

Donc la fonction $f + g$ est croissante sur I . ■

Exercice 4.4 Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



La fonction est croissante sur $] -\infty, -3]$, décroissante sur $[-3, 2]$, puis de nouveau croissante sur $[2, +\infty[$.

4.2 Caractérisation de la monotonie grâce à la dérivée

En pratique, pour des fonctions dérivables, on utilisera le signe de la dérivée pour déterminer la monotonie d'une fonction.

Proposition 4.5 Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

Il est difficile d'imaginer un sujet de concours d'analyse qui ne demande pas de dresser (au moins) un tableau de variations. Il faut donc impérativement savoir le faire... et de manière efficace !

Exercice Type Concours 4.6 — ECRICOME ECS 2016. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\text{pour tout } t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour étudier la monotonie/les variations d'une fonction (dérivable), on étudie le signe de sa dérivée.

La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Or,

$$\varphi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = e^1$$

De même, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(t) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad t < e^1$$

On peut en déduire le tableau de signe de φ' puis les variations de φ .

x	0	e^1	$+\infty$
$\varphi'(t)$		+	-
φ	$-\infty$	e^{-1}	0

Ainsi, la fonction φ est croissante sur $[0, e^1]$ et décroissante sur $[e^1, +\infty[$.

Exemple 4.7 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.

 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour démontrer une inégalité, on peut étudier le signe de la fonction sous-jacente (par exemple, grâce à son tableau de variations, et donc en dérivant...) On souhaite montrer que

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \ln(x) - x + 1 \leq 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction suivante

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction g' , puis les variations de g .

x	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-		
g		$-\infty$	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	$-\infty$

Du tableau de variations de g , on en déduit que

$$\text{pour tout } x > 0, \quad g(x) \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Proposition 4.8 Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .
Si la fonction f vérifie

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0 \quad \text{sauf éventuellement en un nbre fini de points}$$

alors, la fonction f est *strictement* croissante (resp. décroissante) sur I .

Exemple 4.9 Montrer que la fonction f suivante est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 > 0 \text{ sauf en } x = 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4.3 Lien entre inégalités et monotonie

On rappelle les règles suivantes.

- Ajouter ou soustraire un nombre de chaque côté d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
- Multiplier chaque côté d'une inégalité par le même nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.
- Multiplier chaque côté d'une inégalité par le même nombre négatif change le sens de l'inégalité.

Exercice 4.10 Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} \geq 2 &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0 \quad \text{car } x > 0! \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Or, la dernière inégalité est vraie pour tout $x > 0$. Donc, par équivalence, la première inégalité est vraie pour tout $x > 0$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

La manipulation d'une inégalité est très liée à la monotonie des fonctions de la manière suivante.

- Composer une inégalité par une *fonction croissante* ne change pas le sens de l'inégalité.
- Composer une inégalité par une *fonction décroissante* change le sens de l'inégalité.

Exercice 4.11 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Soit $x \geq 0$.

$$\text{On a } x \geq 0$$

$$\text{Donc } x + 2 \geq 2 \quad \text{en ajoutant 2 de chaque côté de l'inégalité}$$

$$\text{Donc } \sqrt{x+2} \geq \sqrt{2} \quad \text{en composant par } x \mapsto \sqrt{x} \text{ qui est croissante sur } [0, +\infty[$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{en composant par } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ qui est décroissante sur }]0, +\infty[$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{en multipliant par } \frac{1}{2} > 0 \text{ de chaque côté}$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 4.12 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$$

Soit $x \geq 0$.

$$\text{On a } x \geq 0$$

$$\text{Donc } e^x \geq 1 \quad \text{en composant par } x \mapsto \exp x \text{ qui est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } e^x + 1 \geq 2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{en composant par } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ qui est décroissante sur }]0, +\infty[$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$$

5 Majorants, minorants, extrema

Définition 5.1 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition	Sur le graphe
f minorée sur $\mathcal{D}$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq m$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $y = m$
f majorée sur $\mathcal{D}$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq M$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $y = M$

On dit que f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire que

il existe deux réels m, M tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $m \leq f(x) \leq M$.

Proposition 5.2 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Alors, la fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

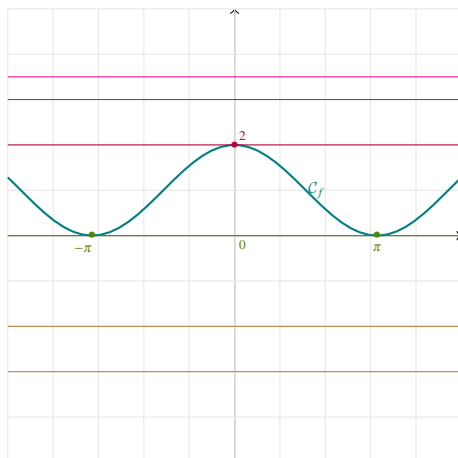
Définition 5.3 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition
On dit que m est le minimum de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq m$ et il existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $m = f(x_0)$
On dit que M est le maximum de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq M$ et il existe $x_1 \in \mathcal{D}$ tel que $M = f(x_1)$

On dit que f admet un **extremum** lorsqu'elle admet soit un minimum, soit un maximum (ou les deux).



Un minimum (resp. un maximum) est donc un minorant (resp. majorant) atteint par la fonction. On précisera toujours en quelle(s) valeur(s) le minimum (resp. maximum) est atteint.



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$.

Majorants de f : 2, 3, 3.5, ...

1/2 n'est pas un **majorant**

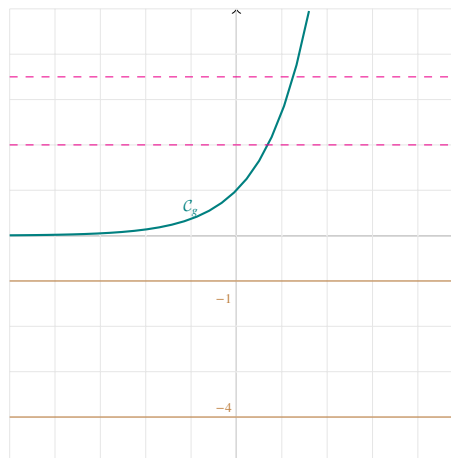
Minorants de f : 0, -2, -10, ...

La fonction f est bornée

Minimum qui vaut 0 atteint en $-\pi, \pi, \dots$

Maximum qui vaut 2 atteint en 0, ...

La fonction admet un extremum



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$.

La fonction g n'a pas de **majorants**

Minorants de g : -1, -2, ...

La fonction g n'est pas bornée

Pas de **maximum**

Pas de **minimum**

Pas d'extremum

! Attention aux pronoms utilisés, on parle d'un majorant/minimum mais du minimum/maximum.

	Unicité (si existence)
Majorant/minorant	Non
Maximum/minimum	Oui
Valeur où le min/max est atteint	Non

Exemple 5.4

Fonction	Minorant	Majorant	Minimum	Maximum
$x \mapsto x^2$	$0, -1, \dots$	Non	0 (atteint en 0)	Non
$x \mapsto x^3$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \frac{1}{x}$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \ln(x)$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \exp(x)$	$0, -2, \dots$	Non	Non	Non

Exemple 5.5 Déterminer les éventuels extrema de la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

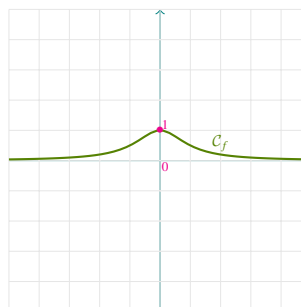
Gestes Invisibles/Automatismes. Pour déterminer les éventuels extrema d'une fonction, on trace son tableau de variations (et donc on étudie le signe de sa dérivée) et on trace éventuellement l'allure de la courbe pour bien se représenter ce qui se passe.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule jamais. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

On peut en déduire le tableau de signe de f' puis les variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\vdots$	-
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$



On en déduit que la fonction f admet un maximum, qui vaut 1 et qui est atteint en 0 mais n'admet de minimum (par contre, elle est minorée par 0).