

TD 01 – Étude qualitative d'une fonction

1 Vocabulaire de base

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

- a) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$ b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
- c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
- e) $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$ f) $f_6 : x \mapsto \exp(3x+2)$
- g) $f_7 : x \mapsto \ln(x+3) - \ln(2x+1)$

Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

- a) $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$ b) $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$
- c) $f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$ d) $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

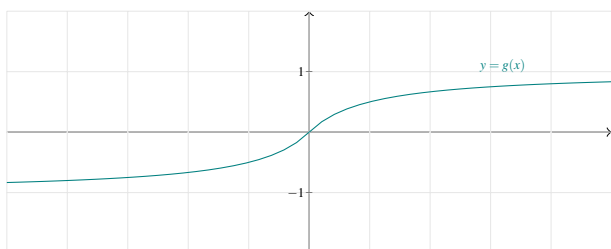
Exercice 3 – À valeurs dans.... Déterminer, pour chaque fonction ci-dessous, un intervalle dans lequel la fonction prend ses valeurs.

- a) $x \mapsto x^2 + 1$ b) $x \mapsto \exp(x-1)$
- c) $x \mapsto 2 \sin(x)$

Exercice 4 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ (on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x-1$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$
3. $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x)$ $x \mapsto x^2 - 1$

Exercice 5 – Représentation graphique. Pour la fonction suivante, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.



2 Dérivation

Exercice 6 – Preuve de cours. Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de la fonction tangente. On rappelle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Exercice 7 – Calcul de dérivées. Pour chaque fonction suivante, donner le domaine de définition, calculer sa dérivée et donner le domaine de définition de sa dérivée.

- a) $x \mapsto 13x^2 + 3x - 49$ b) $x \mapsto \frac{1}{3x}$
- c) $x \mapsto \frac{3}{4x+2}$ d) $x \mapsto \sqrt{x+1}$
- e) $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ f) $x \mapsto \frac{4x+8}{21x-3}$
- g) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ h) $x \mapsto 1 + \ln(1+x)$
- i) $x \mapsto \frac{\exp(2x)}{x^2-1}$

Exercice 8 – Dérivation composée abstraite. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$(H) \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(y) = y \times f\left(\frac{1}{y}\right)$$

1. En dérivant cette expression, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. En utilisant de manière judicieuse l'hypothèse (H), en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x)$$

3 Parité, imparité, périodicité

Exercice 9 – Parité/imparité. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1 , f_2 et f_3

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{x^4 + 1}; \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x) \cos(x); \quad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2 + 1}$$

Montrer que f_1 est paire, f_2 est impaire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).

$$f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}; \quad f_5 : x \mapsto x^2 \ln(x); \quad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$$

- Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
- Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

Exercice 10 – Vrai/Faux sur la parité. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsque les affirmations sont fausses, donner un contre-exemple. Dans toutes les questions, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.
- Si f est impaire alors $f(2) = -f(-2)$.
- Si f est paire alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.
- S'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_1) = -f(x_1)$ avec $f(x_1) \neq 0$ alors f n'est pas paire.

Exercice 11 – Oral CCINP PC 2014. Soient $a > 0$ et f une fonction paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+a)$$

- Montrer que f' est impaire.
- Montrer que f'' est définie et paire.
- Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(a+x) + f(a-x) = 0$$

- Montrer que $f'' + f = 0$.

Exercice 12 – Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrer que si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.
- Si f est impaire et g est paire, quelle est la parité de $g \circ f$?

Exercice 13 – Périodicité. Montrer que la fonction suivante est 4π -périodique.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 14 – Oral CCINP TSI 2021. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2$$

Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

4 Monotonie

Exercice 15 – Autour de la fonction inverse. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$? On commencera par représenter la fonction inverse pour résoudre graphiquement cette inéquation.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$.

Exercice 16 – Monotonie et inégalités. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Montrer que pour tout $x \in [1, 3]$, on a

$$-2 \leq -\frac{2}{x^2} \leq -\frac{2}{9}.$$

- Montrer que pour tout $x \in [-3, 2]$, on a

$$\frac{1}{6} \leq \frac{3}{(x-1)^2+2} \leq \frac{3}{2}.$$

- Montrer que pour tout $u \in [1, 4]$, on a

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leq 1.$$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 2$. Montrer que l'on a

$$2 \leq a^2 - \frac{2}{b} \leq 8.$$

Exercice 17 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$$

- Dresser le tableau de variations de f . On admet que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f .
- La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
- La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

Exercice 18 – Écrit ECRICOME ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

- Dresser le tableau de variations de f . On admet que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ?

Exercice 19 – Oral CCINP TSI 2023. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx + \frac{1}{1+e^x}$$

- Justifier que f_n est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer f_n'' .
- Montrer que $f_n''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$.
- En déduire les variations de f_n .

Exercice 20 – Écrit EMLYON Maths E 2024. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0 . On admettra que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$$

- Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
- Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.