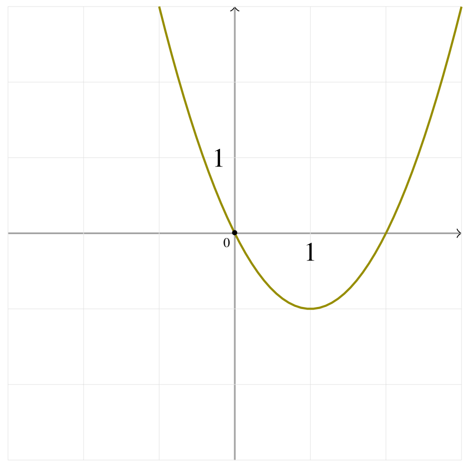
TD 04 – Fonctions bijectives (Correction)

1 Fonctions bijectives

Exercice 1 – Représentation graphique. La fonction représentée ci-dessous est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ vers $[-1,+\infty[$? de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$? de $[1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$?



- La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$, par exemple, car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et 2.

- La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } [-1,+\infty[}$, par exemple, car l'élément $0 \in [-1,+\infty[$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et 2.

- La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de } [1,+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}}$, par exemple, car l'élément $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $[1,+\infty[$.

- La fonction est $\boxed{\text{bijective de } [1,+\infty[\text{ vers } [-1,+\infty[}$ car tout élément de $[-1,+\infty[$ admet un unique antécédént dans $[1,+\infty[$.

Exercice 2 – Attention aux ensembles !. On considère l'application

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.

   La fonction h n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$ car l'élément $2 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ (qui sont 1 et -1).

2. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.

   La fonction h n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}}$ car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ (car l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}_+$).

3. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}_+$ et $F = [1, +\infty[$, l'application h est bijective de E vers F.

   <u>Soit $y \in [1, +\infty[$.</u> On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y-1} \quad (\text{car } y-1 \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \quad (\text{car } x \geqslant 0) \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $y \in [1, +\infty[$, l'équation $y = h(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application h est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } [1, +\infty[.}$

Exercice 3 – Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} (avec la méthode 1).

1. Soit
$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\}\\ x & \longmapsto & 3-\frac{1}{x+2}\end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et calculer f^{-1}.

Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. On sait que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$,
$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=3-\frac{1}{x+2}\\ &\Leftrightarrow (x+2)y=3(x+2)-1 \text{ car } x\neq-2\\ &\Leftrightarrow xy+2y=3x+5\\ &\Leftrightarrow \quad x(3-y)=2y-5\\ &\Leftrightarrow x=\frac{2y-5}{3-y} \text{ car } y\neq 3\end{aligned}$$
Donc, pour tout $y\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, l'équation $y=f(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R}\setminus\{-2\} \text{ vers } \mathbb{R}\setminus\{3\}}$ et sa bijection réciproque est donnée par
$$\boxed{f^{-1}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-2\}\\ y & \longmapsto & \frac{2y-5}{3-y}\end{array}}$$

2. Soit
$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,1[\\ x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1}\end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[-1,1[$ et calculer f^{-1}.

Soit $y\in[-1,1[$. On sait que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=\frac{x^2-1}{x^2+1}\\ &\Leftrightarrow (\ldots)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1+y}{1-y} \text{ car } y\neq 1\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \text{ car } x\geqslant 0\end{aligned}$$
Donc, pour tout $y\in[-1,1[$, l'équation $y=f(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } [-1,1[}$ et sa bijection réciproque est donnée par
$$\boxed{f^{-1}:\begin{array}{ccc}[-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ y & \longmapsto & \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\end{array}}$$

3. Soit
$$f:\begin{array}{ccc}[-1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+2x+2}\end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et calculer f^{-1}.

Soit $y\in[1,+\infty[$. On sait que, pour tout $x\in[-1,+\infty[$,
$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2x+x}\\ &\Leftrightarrow y^2=x^2+2x+2 \qquad \text{car tous les termes sont } \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2+2x+2-y^2=0\end{aligned}$$

On est face à une équation de second degré dont le discriminant est donné par

$$\Delta = 4(-1+y^2) \geqslant 0 \qquad \text{car } y \geqslant 1$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions (sauf si $y=1$, auquel elle admet une unique solution et donc c'est bon) qui valent

$$x_1 = -1-\sqrt{-1+y^2} \text{ et } x_2 = -1+\sqrt{-1+y^2}$$

On remarque que $x_1 \leqslant -1$ et $x_2 \geqslant -1$. Donc, en ne gardant que la "solution qui est au bon endroit", on obtient

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = -1+\sqrt{-1+y^2}$$

Donc, pour tout $y \in [1,+\infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $[-1,+\infty[$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } [-1,+\infty[\text{ vers } [1,+\infty[}$ et sa bijection réciproque est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f^{-1}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [-1,+\infty[\\ & y & \longmapsto & -1+\sqrt{-1+y^2} \end{array}}$$

Exercice 4 – À partir du tableau de variations. On considère le tableau de variations suivant d'une fonction f, supposée continue. (Ici, les flèches montantes/descendantes désignent de la stricte croissance/décroissance.)

x	$-\infty$		-2	0	1	2	10	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	-1	0	1	2	$+\infty$

1. Donner l'image directe $f(\mathbb{R})$, puis $f([1,2])$ et $f(]-\infty,1])$.

   On a,

   $$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-3,+\infty[}$$
   $$\boxed{f([1,2]) = [0,1]}$$
   $$\boxed{f(]-\infty,1]) = [-3,+\infty[}$$

2. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[-3,+\infty[$?

   La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } [-3,+\infty[}$ car par exemple, l'élément $0 \in [-3,+\infty[$ admet deux antécédents sur $\mathbb{R}$ (un qui vaut 1 et l'autre dans $]-\infty,-3[$.

3. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $\mathbb{R}$?

   La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de }]-\infty,-2] \text{ sur } \mathbb{R}}$ car par exemple, l'élément $-4 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $]-\infty,-2]$.

4. La fonction f réalise une bijection de $[0,2]$ sur quel intervalle?

   La fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [0,2] \text{ sur } [-1,1].}$

5. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.

   On sait que
   ① L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}_+$ (admis dans l'énoncé)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le tableau de variations).
   Donc, d'après le tableau de variations, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } f(\mathbb{R}_+) = [-1,+\infty[.}$$

   On note alors φ sa bijection réciproque.
   (a) Que vaut $\varphi(0)$? $\varphi(1)$? $\varphi(2)$?

   - On sait que $f(1) = 0$ donc $\boxed{\varphi(0) = 1.}$
   - On sait que $f(2) = 1$ donc $\boxed{\varphi(1) = 2.}$
   - On sait que $f(10) = 2$ donc $\boxed{\varphi(2) = 10.}$

   (b) Quel est le sens de variation de φ sur son domaine de définition?

   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sa bijection réciproque φ est $\boxed{\text{strictement croissante sur } [-1,+\infty[.}$

(c) Donner un encadrement de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

On sait que

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$$

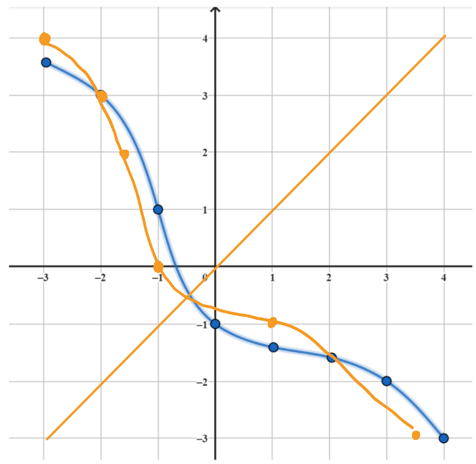
Donc, comme la fonction φ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on en déduit que

$$\varphi(0) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \varphi(1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{1 \leqslant \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant 2}$$

Exercice 5 – Informations graphiques. On considère la représentation graphique d'une fonction f ci-dessous. On répondra aux questions directement par lecture graphique avec des valeurs approchées.



1. Que vaut $f([0,3])$?

   D'après le graphe, on voit que $\boxed{f([0,3]) = [-2,-1]}$

2. La fonction f réalise une bijection de quel intervalle sur quel intervalle? On note g la bijection réciproque.

   La fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [-3,4] \text{ sur } [-3,3.5].}$

3. Expliquer comment obtenir la représentation graphique de g et la tracer ci-contre.

   Les graphes de f et g sont $\boxed{\text{symétriques}}$ l'un de l'autre $\boxed{\text{par rapport à la droite d'équation } y = x.}$

4. Quel est le sens de variation de g?

   La fonction f est strictement décroissante sur $[-3,4]$.
   Donc la fonction g est $\boxed{\text{strictement décroissante sur } [-3,3.5].}$

5. Déterminer $g(-2)$ et $g(-1)$.

   On sait que $f(3) = -2$ donc $\boxed{g(-2) = 3.}$ On sait aussi que $f(0) = -1$ donc $\boxed{g(-1) = 0.}$

6. Déterminer $g([-1,3])$.

   Comme g est strictement décroissante sur $[-3,3.5]$, on a directement que

$$\boxed{g([-1,3])} = [g(3), g(-1)] \boxed{= [-2,0]}$$

Exercice 6 – Calcul d'images directes (sans stricte monotonie). À l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau de variations, donner les images directes suivantes.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-1,2])$? $\boxed{f([-1,2]) = [0,4]}$

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f(]-1,1])$? $\boxed{f(]-1,1]) = [0,1]}$

c) Pour $f : x \mapsto 2x^2 - 8x + 6$, que vaut $f(\mathbb{R})$? $\boxed{f(\mathbb{R}) = [-2,+\infty[}$

Exercice 7 – Calcul d'images directes (avec stricte monotonie). Après avoir rapidement vérifier que les fonctions sont strictement monotones sur les intervalles considérés, déterminer les images directes données en calculant les valeurs/limites aux bornes de l'intervalle.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3])$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement croissante sur** $[0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [1,9]}$$

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement croissante sur** $[0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f([1,3[) = [f(1), f(3)[= [1,9[}$$

c) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-3,-1[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement décroissante sur** $]-\infty,0]$, on a,

$$\boxed{f([-3,-1[) =]f(-1), f(-3)] =]1,9]}$$

d) Pour $f : x \mapsto x^3$, que vaut $f([0,+\infty[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$, on a,

$$\boxed{f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} x^3[= [0,+\infty[}$$

e) Pour $f : x \mapsto \ln(x)$, que vaut $f(]0,1[)$?

Comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f(]0,1[) =]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), f(1)[=]-\infty, 0[}$$

Exercice 8 – Théorème de la bijection (méthode 2). *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $f : x \mapsto x\exp(x)$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

   On sait que

   ① L'ensemble $[-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $[-1,+\infty[$ (par produit)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $[-1,+\infty[$ car la fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et
   $$\forall x \geqslant -1,\ f'(x) = (x+1)\exp(x) > 0$$
   (sauf pour $x=-1$).

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } f([-1,+\infty[) = [-\mathrm{e}^{-1},+\infty[.}$$

2. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

   On sait que

   ① L'ensemble $[-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $[-1,+\infty[$ (par composition)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $[-1,+\infty[$ car la fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et
   $$\forall x \geqslant -1,\ f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} > 0$$
   (sauf pour $x=-1$).

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } f([1,+\infty[) = [-\mathrm{e}^{-1},+\infty[.}$$

Exercice 9 – Oral CCINP TSI 2023. On pose,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\tan(x) - x$$

Montrer que f est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle à déterminer et que sa bijection réciproque est impaire.

Exercice 10 – Résolution d'une équation (méthode 3). *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que l'équation $x^3+2x-1=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$.

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\, x\longmapsto x^3+2x-1$. Pour tout $x\in]0,1[$, on a

$$x^3+2x-1=0 \iff f(x)=0$$

Montrons que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f(]0,1[)$.

- L'ensemble $]0,1[$ est un **intervalle**.
- La fonction f est **continue sur** $]0,1[$ (comme fonction polynomiale)
- Montrons que f est strictement monotone sur $]0,1[$. La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x\in]0,1[,\quad f'(x)=3x^2+2>0$$

Donc f est **strictement croissante sur** $]0,1[$**.**

D'après le **théorème de la bijection**, f réalise donc une

$$\boxed{\text{bijection de }]0,1[\text{ sur } f(]0,1[)=]-1,2[.}$$

Comme $0\in]-1,2[$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0,1[$ (autrement dit, 0 a un unique antécédent par f dans $]0,1[$).

Donc $\boxed{\text{l'équation } x^3+2x-1=0 \text{ admet une unique solution dans }]0,1[.}$

2. Montrer que l'équation $x\ln(x)=1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$.

Soit $f:]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\,;\, x\longmapsto x\ln(x)$. Pour tout $x\in]1,+\infty[$, on a

$$x\ln(x)=1 \iff f(x)=1$$

Montrons que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f(]1,+\infty[)$.

- L'ensemble $]1,+\infty[$ est un **intervalle**.
- La fonction f est **continue sur** $]1,+\infty[$ (comme produit de fonctions qui le sont).
- Montrons que f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad f'(x)=\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1>0$$

Donc f est **strictement croissante sur** $]1,+\infty[$**.**

D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une

$$\boxed{\text{bijection de }]1,+\infty[\text{ sur } f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[.}$$

Comme $1\in]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$ (autrement dit, 1 a un unique antécédent par f dans $]1,+\infty[$).

Donc $\boxed{\text{l'équation } x\ln(x)=1 \text{ admet une unique solution dans }]1,+\infty[.}$

3. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{e^x}$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$, puis que $1 < \alpha < e$.

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \ln(x) - e^{-x}$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\ln(x) = \frac{1}{e^x} \iff f(x) = 0$$

Montrons que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)$.

- L'ensemble $]0,+\infty[$ est un **intervalle**.
- La fonction f est **continue sur** $]0,+\infty[$ (comme somme de fonctions qui le sont).
- Montrons que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} > 0$$

  Donc f est **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$**.**

D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une

$$\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.}$$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ (autrement dit, 0 a un unique antécédent par f dans $]0,+\infty[$).

Donc $\boxed{\text{l'équation } \ln(x) = \dfrac{1}{e^x} \text{ admet une unique solution dans }]0,+\infty[\text{, que l'on note } \alpha.}$

Montrons que $1 < \alpha < e$. Par construction, $\alpha \in]0,+\infty[$, c'est-à-dire $\alpha > 0$. Or, comme la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on sait que

$$1 < \alpha < e \iff f(1) < f(\alpha) < f(e) \iff -e^{-1} < 0 < 1 - e^{-e}$$

Or la dernière inégalité est vraie*. Donc, par équivalence, la première inégalité est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{1 < \alpha < e}$$

*En effet, par positivité de l'exponentielle, on sait que $-e^{-1} < 0$. De plus,

$$\begin{array}{lll} & e > 0 & \\ \text{donc} & -e < 0 & \\ \text{donc} & e^{-e} < 1 & \text{car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 0 < 1 - e^{-e} & \end{array}$$

Exercice 11 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.

On sait que,

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un **intervalle**.
2. La fonction f est **continue sur** $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions qui le sont)
3. Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0$$

Donc f est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

D'après le **théorème de la bijection**, f réalise donc une

$$\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R} \text{ sur l'intervalle } J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

2. Justifier que f^{-1} est dérivable et déterminer $(f^{-1})'(1)$.

On sait que,

1. f est **bijective** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf question 1)
2. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$,
3. f' **ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x \neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(y))}$$

En particulier,

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(1))}$$

Or, $f(0) = 1$, donc $f^{-1}(1) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{f^{-1}(1)} = \frac{1}{1 + \exp(0)} \boxed{= \tfrac{1}{2}}$$

Exercice 12 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,; x\longmapsto xe^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser l'équation de la tangente en 0.

   La fonction f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=(1+x)e^x$$

   On a donc

   $$\begin{aligned} f'(x)\geq 0 &\iff (1+x)e^x\geq 0\\ &\iff 1+x\geq 0 \text{ car } e^x>0\\ &\iff x\geq -1.\end{aligned}$$

   On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

   L'équation de la tangente en 0 est

   $$y=f(0)+(x-0)f'(0)$$

   soit après calculs,

   $$\boxed{y=x}$$

2. Démontrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble J à déterminer. On note φ sa bijection réciproque.

   On sait que,
   1. L'ensemble $]-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   2. f est **continue** sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont.
   3. f est **strictement croissante** sur $]-1,+\infty[$ d'après la question 1.

   D'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise donc une

   $$\boxed{\text{bijection de }]-1,+\infty[\text{ sur } J=f(]-1,+\infty[)=]-e^{-1},+\infty[.}$$

3. Déterminer $\varphi(e)$.

   On remarque que $f(1)=e$ donc $\boxed{\varphi(e)=1.}$

4. Justifier que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(e)$.

   On sait que
   1. f est **bijective** de $]-1,+\infty[$ sur $]-e^{-1},+\infty[$,
   2. f est **dérivable** sur $]-1,+\infty[$,
   3. f' **ne s'annule pas** sur $]-1,+\infty[$ car

   $$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad f'(x)=(1+x)e^x\neq 0$$

   On en déduit que $\varphi=f^{-1}$ est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et

   $$\forall y\in]-e^{-1},+\infty[,\quad \varphi'(y)=\frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

   En particulier,

   $$\boxed{\varphi'(e)=\frac{1}{f'(\varphi(e))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}}$$

Exercice 13 – Dérivabilité de la fonction réciproque. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x + \ln(x) + 2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

   On sait que,
   1. L'ensemble $]0,+\infty[$ est un **intervalle**.
   2. La fonction f est **continue** sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont.
   3. La fonction f est **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$ car la fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
   $$\forall x > 0, \qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

   D'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise donc une
   $$\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } J = f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.}$$

   On note f^{-1} la bijection réciproque, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2. Dresser le tableau de variation de f^{-1} en précisant les valeurs remarquables et les limites.

   On dispose de plusieurs informations.
   - Comme f est strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.
   - On sait que
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   donc,
   $$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$
   - (On peut remarquer que $f(1) = 3$ donc $f^{-1}(3) = 1$.)

   D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse 1.

   L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse 1 est la droite donnée par
   $$\boxed{y} = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 3 \boxed{= 2x+1}$$

4. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point N d'abscisse 3.

   On sait que
   1. f est **bijective** de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
   2. f est **dérivable** sur $]0,+\infty[$,
   3. f' **ne s'annule pas** sur $]0,+\infty[$ car
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \;\; f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \neq 0$$

   Donc, la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}(y)+1}}$$

   En particulier,
   $$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{f^{-1}(3)}{f^{-1}(3)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(comme $f(1) = 3$, on sait que $f^{-1}(3) = 1$). Ainsi, l'équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point N d'abscisse 3 est donné par

$$\boxed{y} = (f^{-1})'(3)(x-3) + f^{-1}(3) = \frac{1}{2}(x-3)+1 \boxed{= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}}$$

5. Construire sur un même graphique $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$, T et T'.

6. Montrer que

$$\forall x \in J, \ \ (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$$

Cf Question 4.

2 Fonction exponentielle et logarithme

Exercice 14 – (In)équations avec ln **et** exp. Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.

$\ln(x) = -7$ ☐	☐ $x \geqslant 1$
$\exp(x) = 4$ ☐	☐ $x \leqslant \frac{1}{4}(e^3+1)$
$\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)$ ☐	☐ e^{-7}
$e^{-3x+5} < 2$ ☐	☐ $x > -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{5}{3}$
$\ln(4x-1) \leqslant 3$ ☐	☐ $\ln(4)$

- Soit $x > 0$. On a :

$$\boxed{\ln(x) = -7 \iff x = e^{-7}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\exp(x) = 4 \iff x = \ln 4}$$

- Soit $x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$. On a :

$$\boxed{\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)} \iff 3x - 1 \geqslant 2$$
$$\iff 3x \geqslant 3$$
$$\boxed{\iff x \geqslant 1}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{e^{-3x+5} < 2} \iff -3x + 5 < \ln 2$$
$$\iff -3x < \ln 2 - 5$$
$$\iff x > -\frac{1}{3}(\ln 2 - 5)$$
$$\boxed{\iff x > -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{5}{3}}$$

- Soit $x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$. On a :

$$\boxed{\ln(4x-1) \leqslant 3} \iff 4x - 1 \leqslant e^3$$
$$\iff 4x \leqslant e^3 + 1$$
$$\boxed{\iff x \leqslant \frac{1}{4}(e^3+1)}$$

Exercice 15 – Calculs algébriques sur ln et exp. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

   a) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\ln(8)+5\ln(2)$

   c) $\ln(\sqrt{32})$ d) $\ln(10)-\ln(20)$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^5\times e^2\times \mathrm{e}^{-3}$ b) $\mathrm{e}^3\times(\mathrm{e}^{-4})^2$

   c) $\frac{\mathrm{e}^4\times\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}}$ d) $\frac{\mathrm{e}\times(\mathrm{e}^5)^7}{\mathrm{e}^{-9}\times\mathrm{e}^4}$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^{2\ln 3+\ln 4}$ b) $\mathrm{e}^{3\ln 2-\ln 4}$

   c) $\frac{\mathrm{e}^{\ln 6+1}}{\mathrm{e}^{\ln 9+2}}$ d) $\mathrm{e}^{3\ln 3}+\mathrm{e}^{2\ln 7}$

   e) $\mathrm{e}^{5\ln 3}\times\mathrm{e}^{4\ln 9}$ f) $\ln(1+\mathrm{e}^5)+\ln\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\right)$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

   a) $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}}$ b) $\frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$

   c) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}$ d) $-\ln(2x)-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

   e) $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{-x}$ f) $\frac{\mathrm{e}^{x^2-2x}\times(\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$

5. Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer les expressions A et B et factoriser les expressions C (par e^{-4x}) et D (par e^x-3x).

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{e}^{2x}+5)^2\\ B &= (\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{-x}+5)\\ C &= 5\mathrm{e}^{-4x}-3\mathrm{e}^{-4x}+7\mathrm{e}^{-4x}\\ D &= \mathrm{e}^{2x}-9x^2 \end{aligned}$$

1.a) $\boxed{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = -\ln(4)$
$= -\ln(2^2)$
$\boxed{= -2\ln(2)}$

1.b) $\boxed{\ln(8) + 5\ln(2)} = \ln(2^3) + 5\ln(2)$
$= 3\ln(2) + 5\ln(2)$
$\boxed{= 8\ln(2)}$

1.c) $\boxed{\ln(\sqrt{32})} = \frac{1}{2}\ln(32)$
$= \frac{1}{2}\ln(2^5)$
$\boxed{= \frac{5}{2}\ln(2)}$

1d) $\boxed{\ln(10) - \ln(20)} = \ln(10) - \ln(2 \times 10)$
$= \ln(10) - (\ln 2 + \ln 10)$
$= \ln(\cancel{10}) - \ln 2 - \cancel{\ln 10}$
$\boxed{= -\ln(2)}$

2.a) $\boxed{e^5 \times e^2 \times e^{-3}} = e^{5+2-3}$
$\boxed{= e^4}$

b) $\boxed{e^3 \times (e^{-4})^2} = e^3 \times e^{-4\times 2}$
$= e^3 \times e^{-8}$
$= e^{3-8}$
$\boxed{= e^{-5}}$

c) $\boxed{\dfrac{e^4 \times e^{-5}}{e}} = \dfrac{e^4 \times e^{-5}}{e^1}$
$= e^{4-5-1}$
$\boxed{= e^{-2}}$

d) $\boxed{\dfrac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4}} = e^{1+5\times 7-(-9+4)}$
$\boxed{= e^{41}}$

3. a) $\boxed{e^{2\ln(3)+\ln 4}} = e^{2\ln(3)} \times e^{\ln(4)}$
$= e^{\ln(3^2)} \times e^{\ln(4)}$
$= 3^2 \times 4$
$\boxed{= 36}$

b) $\boxed{e^{3\ln 2 - \ln 4}} = e^{3\ln(2)} \times e^{-\ln 4}$
$= e^{\ln(2^3)} \times e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$
$= 2^3 \times \frac{1}{4}$
$\boxed{= 2}$

c) $\boxed{\dfrac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}} = \dfrac{e^{\ln 6} \times e}{e^{\ln 9} \times e^2}$
$= \frac{6}{9} e^{-1}$
$\boxed{= \frac{2}{3} e^{-1}}$

d) $\boxed{e^{3\ln 3} + e^{2\ln 7}} = e^{\ln(3^3)} + e^{\ln(7^2)}$
$= 3^3 + 7^2$
$= 27 + 49$
$\boxed{= 76}$

e) $\boxed{e^{5\ln 3} \times e^{4\ln(9)} = 3^5 \times 9^4}$

0

f) $\boxed{\ln(1+e^5) + \ln\left(\dfrac{1}{1+e^{-5}}\right)} = \ln\left(e^5(1+e^{-5})\right) - \ln(1+e^{-5})$
$= \ln(e^5) + \cancel{\ln(1+e^{-5})} - \cancel{\ln(1+e^{-5})}$
$\boxed{= 5}$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2}$$

$$= e^{\cancel{x^2}+\cancel{2x}-(\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1)}$$

$$\boxed{= e^{-1}}$$

c) Soit $x>0$. On a :

$$\boxed{e^{2\ln(x)}} = e^{\ln(x^2)}$$

$$\boxed{= x^2}$$

d) Soit $x>0$. On a :

$$\boxed{-\ln(2x)-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \ln\left(\frac{1}{2x}\right)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x^2)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2\cancel{x}} \times \frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{= -\ln 2}$$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\sqrt{e^{2x}} \times e^{-x}} = \left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x}$$

$$= e^{2x \times \frac{1}{2}} \times e^{-x}$$

$$= e^{x} \times e^{-x}$$

$$= e^{x-x}$$

$$= e^{0}$$

$$\boxed{= 1}$$

f) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2-2x} \times (e^{x})^2}{(e^{2x})^3}} = e^{x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2x\times 3}$$

$$\boxed{= e^{x^2-6x}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{A} = (e^{2x}+5)^2$$

$$= (e^{2x})^2 + 2 \times e^{2x} \times 5 + 5^2$$

$$\boxed{= e^{4x} + 10e^{2x} + 25}$$

$$\boxed{B} = (e^{2x}-2)(e^{-x}+5)$$

$$= e^{2x} \times e^{-x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 2 \times 5$$

$$\boxed{= e^{x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 10}$$

$$\boxed{C} = 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x}$$

$$= (5-3+7)e^{-4x}$$

$$\boxed{= 9e^{-4x}}$$

$$\boxed{D} = e^{2x} - 9x^2$$

$$= (e^{x})^2 - (3x)^2$$

$$\boxed{= (e^{x}-3x)(e^{x}+3x)}$$