

TD 03 – Nombres complexes : étude algébrique

1 Nombres complexes sous forme algébrique

Exercice 1 – Opérations sur les nombres complexes. On pose $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$. Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $z_1 + z_2$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{z_1 + z_2} &= 5 - 2i + -2 + 4i \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

b) $z_1 - z_2$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{z_1 - z_2} &= 5 - 2i - (-2 + 4i) \\ &= 5 - 2i + 2 - 4i \\ &= 7 - 6i \end{aligned}$$

c) $4z_1$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{4z_1} &= 4(5 - 2i) \\ &= 20 - 8i \end{aligned}$$

d) $z_1 \times z_2$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{z_1 \times z_2} &= 5 - 2i \times (-2 + 4i) \\ &= -10 + 20i + 4i - 8i^2 \\ &= -10 + 24i + 8 \\ &= -2 + 24i \end{aligned}$$

e) z_1^2

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{z_1^2} &= (5-2i)^2 \\ &= 25 - 20i + (2i)^2 \\ &= 25 - 20i - 4 \\ &= 21 - 20i\end{aligned}$$

f) $\frac{1}{z_1}$

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1}{z_1}} &= \frac{1}{5-2i} \\ &= \frac{5+2i}{(5-2i)(5+2i)} \\ &= \frac{5+2i}{25+4} \\ &= \frac{5}{29} + i\frac{2}{29}\end{aligned}$$

g) $\frac{z_1}{z_2}$

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{z_1}{z_2}} &= \frac{5-2i}{-2+4i} \\ &= \frac{(5-2i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} \\ &= \frac{-10-20i+4i+8i^2}{4+16} \\ &= \frac{-18-16i}{20} \\ &= -\frac{9}{10} - i\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Exercice 2 – Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $-(-2 + 5i)(-1 - i)$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{-(-2 + 5i)(-1 - i)} &= -(2 + 2i - 5i - 5i^2) \\ &= -(7 - 3i) \\ &= \boxed{-7 + 3i}\end{aligned}$$

b) $(2 + 3i)^2 - (i - 1)^2$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(2 + 3i)^2 - (i - 1)^2} &= 4 + 12i - 9 - (-1 - 2i + 1) \\ &= -5 + 12i + 2i \\ &= \boxed{-5 + 14i}\end{aligned}$$

c) $-\frac{1}{i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{-\frac{1}{i}} &= -\frac{1 \times (-i)}{i \times (-i)} \\ &= \frac{i}{1} \\ &= \boxed{i}\end{aligned}$$

d) $\frac{1}{2 - i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1}{2 - i}} &= \frac{1 \times (2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\ &= \frac{2 + i}{4 + 1} \\ &= \boxed{\frac{2}{5} + i\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

e) $\frac{3-5i}{1+i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{3-5i}{1+i}} &= \frac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{3-3i-5i+5i^2}{2} \\ &= \frac{-2-8i}{2} \\ &= \boxed{-1-4i}\end{aligned}$$

f) $(1+i)^2$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(1+i)^2} &= 1+2i+i^2 \\ &= \boxed{2i}\end{aligned}$$

g) $(1+i)^7$

En développant et en utilisant la réponse précédente, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(1+i)^7} &= [(1+i)^2]^3 \times (1+i) \\ &= (2i)^3 \times (1+i) \\ &= -8i(1+i) \\ &= \boxed{8-8i}\end{aligned}$$

h) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

En utilisant la quantité conjuguée, on a déjà,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1+i}{2-i}} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+i+2i+i^2}{5} \\ &= \frac{1+3i}{5}\end{aligned}$$

Puis, en développant, on obtient

$$\begin{aligned}\boxed{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2} &= \left(\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{9}{25} \\ &= \boxed{-\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Les puissances de i . Simplifier i^2, i^3, i^4, i^7 et i^{2025} .

On a

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{i^3} = i^2 \times i \quad \boxed{= -i}$$

$$\boxed{i^4} = (i^2)^2 = (-1)^2 \quad \boxed{= 1}$$

On a $2025 = 4 \times 506 + 1$. Donc

$$\boxed{i^{2025}} = i^{4 \times 506 + 1} = (i^4)^{506} \times i = 1^{506} \times i \quad \boxed{= i}$$

Exercice 4 – Parties réelle/imaginaire. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

a) $\frac{3+2i}{4}$

On a,

$$\frac{3+2i}{4} = \frac{3}{4} + i\frac{1}{2}$$

Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{3+2i}{4}\right) = \frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{3+2i}{4}\right) = \frac{1}{2}}$$

b) i^3

On a, $i^3 = -i$. Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}(i^3) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(i^3) = -1}$$

c) $\frac{1}{i}$

On a,

$$\frac{1}{i} = -i$$

Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\right) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{i}\right) = -1}$$

d) $\frac{1}{1+2i}$

On a, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$$

Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = \frac{1}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = -\frac{2}{5}}$$

e) $\frac{1+i}{2i-3}$

On a, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\frac{1+i}{2i-3} = -\frac{1}{13} - i\frac{5}{13}$$

Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\frac{1}{13}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\frac{5}{13}}$$

Exercice 5 – Unicité de la forme algébrique.

1. Soit $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$ avec $x \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $x \in \mathbb{R}$, z est-il un nombre réel ? un imaginaire pur ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que

$$\begin{aligned} z &= x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix \\ &= 2x + 2 + i(-4x + 2) \end{aligned}$$

Comme x est un nombre réel, on en déduit que,

$$\operatorname{Re}(z) = 2x + 2 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = -4x + 2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{z \in \mathbb{R}} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \boxed{z \in i\mathbb{R}} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

2. Soient $z = a^2 - a - 2 + 3ia$ et $z' = -2a + i(a^2 + a + 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $z = z'$?

Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $a \in \mathbb{R}$, en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{z = z'} &\Leftrightarrow a^2 - a - 2 + 3ia = -2a + i(a^2 + a + 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = -2a \\ 3a = a^2 + a + 1 \end{cases} \quad \text{car } a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a + 2) = 0 \\ (a - 1)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \boxed{a = 1.} \end{aligned}$$

Exercice 6 – Équations dans $\mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $(7 - 3i)\bar{z} - 2 + i = 0$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}(7 - 3i)\bar{z} - 2 + i = 0 &\iff (7 - 3i)\bar{z} = 2 - i \\ &\iff \bar{z} = \frac{2 - i}{7 - 3i} \\ &\iff \bar{z} = \frac{17}{58} - i\frac{1}{58} \\ &\iff z = \frac{17}{58} + i\frac{1}{58} \quad \text{en utilisant la qté conjuguée}\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{\frac{17}{58} + i\frac{1}{58}}$.

b) $2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

En raisonnant comme à la question précédente, on trouve que l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{1 + 3i}$.

c) $(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 1 - 2i$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 1 - 2i &\iff (1 + i)(x + iy) + (2 - i)(x - iy) = 1 - 2i \\ &\iff x - y + i(x + y) + 2x - y + i(-x - 2y) = 1 - 2i \\ &\iff 3x - 2y - iy = 1 - 2i \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -y = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ &\iff z = \frac{5}{3} + 2i\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{\frac{5}{3} + 2i}$.

d) $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 1$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. En raisonnant comme à la question précédente, on trouve que,

$$\begin{aligned}(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 1 &\iff (1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) = 1 \\ &\iff 2x - 2y = 1\end{aligned}$$

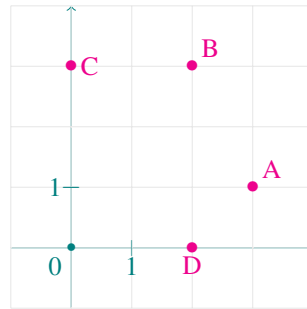
Ainsi, l'équation $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 1$ admet une infinité de solutions sous la forme

$$z = x + iy \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } 2x - 2y = 1$$

ou sous la forme (autre formulation)

$$z = x + i\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

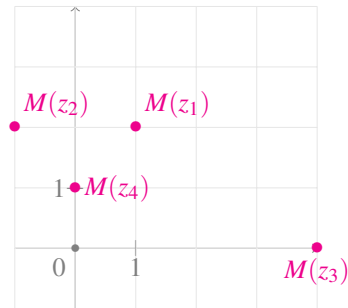
Exercice 7 – Représentation géométrique d'un nombre complexe. Donner l'affixe de chacun des points du plan représentés sur la figure.



- Affixe de $A(3, 1)$: $3 + i$
- Affixe de $B(2, 3)$: $2 + 3i$
- Affixe de $C(0, 3)$: $3i$
- Affixe de $D(2, 0)$: 2

Exercice 8 – Représentation géométrique d'un nombre complexe. Représenter sur le plan l'image de chacun des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = 1 + 2i$
- b) $z_2 = -1 + 2i$
- c) $z_3 = 4$
- d) $z_4 = i$



Exercice 9 – Conjugué. Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $5 - 6i$

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{5 + 6i}$

b) $5i$

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-5i}$

c) 5

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{5}$

d) $\frac{1}{i} = -i$ en utilisant la qté conjuguée

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{i}$

e) $(1 + i)^2 = 2i$ en développant

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-2i}$

f) $\frac{2}{2+i} = \frac{4}{5} - i\frac{2}{5}$ (en utilisant la qté conjuguée)

conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{4}{5} + i\frac{2}{5}}$

Exercice 10 – Conjugué. Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On ne donnera pas le résultat sous forme algébrique.*

a) $i(2 - i)$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-i(2 + i)}$

b) $\frac{1 - i}{1 + i}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1 + i}{1 - i}}$

c) $i(4 - 2i)^3$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-i(4 + 2i)^3}$

d) $\frac{i\sqrt{3}}{1 + 6i}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{-i\sqrt{3}}{1 - 6i}}$

e) $(3 - 2i)(4i - 1)$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{(3 + 2i)(-4i - 1)}$

f) $\frac{z(1 - i\bar{z})}{2z - 4i\bar{z}}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\bar{z}(1 + iz)}{2\bar{z} + 4iz}}$

Exercice 11 – Soit $z \in \mathbb{C}$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ? imaginaires purs ? On pourra s'aider du calcul du conjugué pour répondre à ces questions.

Pour répondre à ces questions, on commence par calculer le conjugué du nombre complexe considéré, puis on utilise le fait que

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

et que,

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = -z$$

a) $1 - z\bar{z}$

On peut remarquer que

$$\overline{1 - z\bar{z}} = 1 - \bar{z}z = 1 - z\bar{z}$$

Donc $\boxed{1 - z\bar{z} \in \mathbb{R}.}$

b) $z + \bar{z}$

On peut remarquer que

$$\overline{z + \bar{z}} = \bar{z} + z = z + \bar{z}$$

Donc $\boxed{z + \bar{z} \in \mathbb{R}.}$

c) $z^2 - \bar{z}^2$

On peut remarquer que

$$\overline{z^2 - \bar{z}^2} = \bar{z}^2 - z^2 = -(z^2 - \bar{z}^2)$$

Donc $\boxed{z^2 - \bar{z}^2 \in i\mathbb{R}.}$

d) $\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$

On peut remarquer que

$$\frac{\overline{z + \bar{z}}}{\overline{z - \bar{z}}} = \frac{\bar{z} + z}{\bar{z} - z} = -\left(\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}\right)$$

Donc $\boxed{\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} \in i\mathbb{R}.}$

e) $(z - i\bar{z})(z + i\bar{z})$

De même, $\boxed{(z - i\bar{z})(z + i\bar{z}) \in \mathbb{R}}$

f) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$

De même, $\boxed{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{R}}$

Exercice 12 – Calculs de module. Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $\frac{5}{2}i$

On a,

$$\left| \frac{5}{2}i \right| = \left| 0 + \frac{5}{2}i \right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

b) -3

On a,

$$|-3| = |-3 + 0i| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$$

c) $-4i$

On a,

$$|-4i| = 4$$

d) $1 + i$

On a,

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

e) $1 - i\sqrt{3}$

On a,

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

f) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

On a,

$$|\sqrt{3} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$$

g) $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

On a,

$$|\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)| = \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = \sqrt{1} = 1$$

h) $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$

On a,

$$\boxed{|\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)|} = \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = \sqrt{1} \boxed{= 1}$$

i) $(3 + 2i)^5$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{|(3 + 2i)^5|} &= |3 + 2i|^5 \\ &= \left(\sqrt{3^2 + 2^2}\right)^5 \\ &= \sqrt{13}^5 \\ &= (\sqrt{13})^2 \times (\sqrt{13})^2 \times \sqrt{13} \\ &= 13 \times 13 \times \sqrt{13} \\ &\boxed{= 169\sqrt{13}} \end{aligned}$$

j) $(i - 1)(i - 3)(i - 5)$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{|(i - 1)(i - 3)(i - 5)|} &= |i - 1||i - 3||i - 5| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1^2} \times \sqrt{(-5)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{26} \\ &= \sqrt{2 \times 10 \times 26} \\ &= \sqrt{2^2 \times 5 \times 26} \\ &\boxed{= 2\sqrt{130}} \end{aligned}$$

k) $\frac{7}{(2 - i)^2}$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\left|\frac{7}{(2 - i)^2}\right|} &= \frac{|7|}{|2 - i|^2} \\ &= \frac{7}{(\sqrt{5})^2} \\ &\boxed{= \frac{7}{5}} \end{aligned}$$

$$1) \quad \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$$

On a,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right| &= \left| \frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)} \right| \\ &= \left| \frac{2}{2} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 13 – Lien conjugué/module pour un nombre complexe de module 1. Soient a et b deux nombres complexes de *module 1* : $|a| = 1$ et $|b| = 1$ avec $a \neq b$. Montrer que

$$Z = \frac{a+b}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

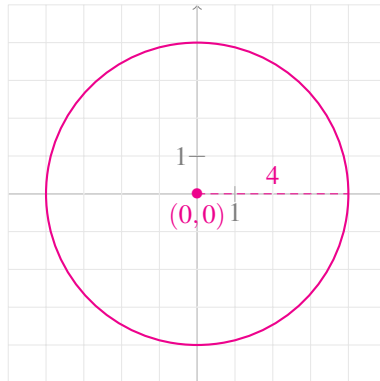
On a,

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \overline{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)} \\ &= \frac{\bar{a} + \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \\ &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\ &= \frac{b+a}{b-a} \\ &= -\frac{a+b}{a-b} \\ &= -Z\end{aligned}$$

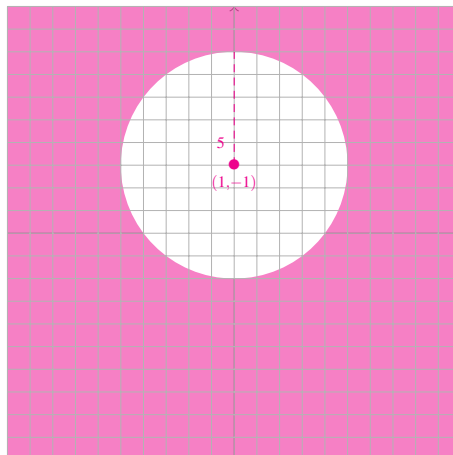
D'où $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 14 – Représentation géométrique. Représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

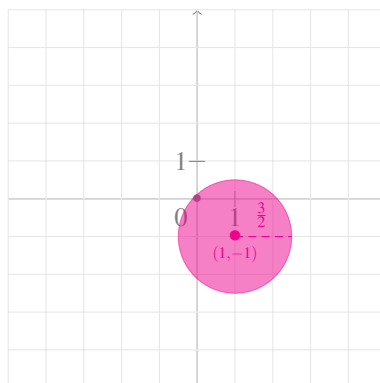
a) $|z| = 4$



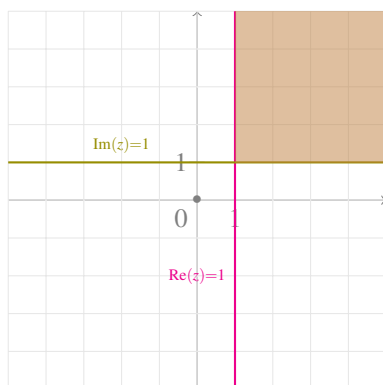
b) $|z - 3i| \geq 5$



c) $|z - 1 + i| \leq \frac{3}{2}$



d) $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$



Exercice 15 – Utilisation de l'inégalité triangulaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|1 + a| + |a + b| + |b| \geq 1.$$

Soient a et b deux nombres complexes. En utilisant deux fois **l'inégalité triangulaire**, on obtient rapidement le résultat:

$$\begin{aligned} 1 = |1| &= |1 + a - a - b + b| \\ &\leq |1 + a| + |-a - b + b| \\ &\leq |1 + a| + |-a - b| + |b| \\ &= |1 + a| + |a + b| + |b|. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{|1 + a| + |a + b| + |b| \geq 1.}$$

2 Équations

algébriques

Exercice 16 – Racines carrées complexes. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) 9

On remarque directement que $9 = 3^2$. Donc le nombre complexe 9 admet deux racines carrées complexes données par $\boxed{-3 \text{ et } 3}$.

b) -17

On remarque directement que $9 = (i\sqrt{17})^2$. Donc le nombre complexe -17 admet deux racines carrées complexes données par $\boxed{i\sqrt{17} \text{ et } -i\sqrt{17}}$.

c) $3+4i$

Soit $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned} \omega^2 = 3+4i &\iff \begin{cases} \omega^2 = 3+4i \\ |\omega|^2 = |3+4i| & \text{(ajout artificiel mais essentiel)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 & \text{(On passe aux calculs avec l'expression } \omega = x + iy) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 & \text{(On identifie parties réelle et imaginaire pour avoir 3 lignes dans le système)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 = 8 & (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = 2 & (L_2 - L_1) \\ xy > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc $\omega = 2+i$ ou $\omega = -2-i$. Donc, les racines carrées de $3+4i$ sont donc $\boxed{2+i \text{ et } -2-i}$.

d) $7 + 24i$

Soit $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\omega^2 = 7 + 24i &\iff \begin{cases} \omega^2 = 7 + 24i \\ |\omega|^2 = |7 + 24i| & \text{ajout artificiel mais essentiel} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 7 + 24i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 = 32 & (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = 18 & (L_2 - L_1) \\ xy > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -4 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} .\end{aligned}$$

Donc $\omega = 4 + 3i$ ou $\omega = -4 - 3i$. Les racines carrées de $7 + 24i$ sont donc $\boxed{4 + 3i \text{ et } -4 - 3i}$.

Exercice 17 – Introduction à la factorisation de polynôme. Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

$a = 2$ et $b = 3$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

$a = -2$ et $b = 1$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

$a = -3$ et $b = 5$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

$a = \frac{1}{2}$ et $b = 8$

Exercice 18 – Factorisation de polynôme. Sans calcul de discriminant, factoriser les polynômes suivants et en déduire les racines.

a) $x \mapsto 3x^2 - 14x + 8$ sachant que 4 est racine

Comme 4 est une racine du polynôme $x \mapsto 3x^2 - 14x + 8$, on sait qu'il existe un autre polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 - 14x + 8 = (x - 4)Q(x)$$

On peut remarquer que nécessairement Q est un polynôme de degré 1 (afin que le produit par $x \mapsto x - 4$ fasse un polynôme de degré deux). Ainsi, le polynôme Q est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec a et b deux réels à déterminer. Ainsi, on cherche a et b deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 - 14x + 8 = (x - 4)(ax + b)$$

En identifiant les termes de plus haut degré (c'est-à-dire de degré 2), on trouve que $a = 3$. Et en identifiant les coefficients constants, on trouve que $b = -2$. Ainsi, on obtient la factorisation suivante

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 - 14x + 8 = (x - 4)(3x - 2)}$$

On peut alors en déduire toutes les racines du polynôme. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 14x + 8 = 0 &\iff (x - 4)(3x - 2) = 0 \\ &\iff x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 2 = 0 \\ &\iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{4 \text{ et } \frac{2}{3}}$.

b) $x \mapsto 7x^2 + 23x + 6$ sachant que -3 est racine

En utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 7x^2 + 23x + 6 = (x + 3)(7x + 2)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-3 \text{ et } -\frac{2}{7}}$.

c) $x \mapsto mx^2 + (2m + 1)x + 2$ sachant que -2 est racine (avec $m \in \mathbb{R}^*$)

Soit $m \in \mathbb{R}$. En utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad mx^2 + (2m + 1)x + 2 = (x + 2)(mx + 1)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-2 \text{ et } -\frac{1}{m}}$.

d) $x \mapsto x^2 - 4x - 12$ en trouvant une racine évidente

On remarque que -2 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : -2 et 6 .

e) $x \mapsto 3x^2 + 4x + 1$ en trouvant une racine évidente

On remarque que -1 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(3x + 1)$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : -1 et $-\frac{1}{3}$.

f) $z \mapsto z^2 - 2iz - 1 + 2i$ en trouvant une racine évidente

On remarque que 1 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 2iz - 1 + 2i = (z - 1)(z + 1 - 2i)$$

Donc le polynôme possède deux racines complexes : 1 et $-1 + 2i$.

Exercice 19 – Équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^2 + z + 5 = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = -19 = (i\sqrt{19})^2 \neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}$$

b) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2 \neq 0$ (en utilisant le résultat de la Question c) de l'Exercice 16). L'équation admet deux solutions complexes données par

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}$$

c) $2z^2 - 7z + 3 = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = 25 = 5^2 \neq 0$. L'équation admet deux solutions réelles données par

$$z_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{7+5}{4} = 3$$

d) $z^2 - (6+i)z + 11 + 13i = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = -9 - 40i \neq 0$. Pour obtenir l'expression des solutions, il nous faut une racine carrée de δ que l'on calcule grâce à la méthode usuelle.

On cherche donc à résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta = -9 - 40i$, d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$. Posons $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \delta^2 = -9 - 40i &\iff \begin{cases} \omega^2 = -9 - 40i \\ |\omega|^2 = |-9 - 40i| \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = -9 - 40i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} = \sqrt{1681} = 41 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -9 \\ x^2 + y^2 = 41 \\ 2xy = -40 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 = 32 & (L_1 + L_2) \\ 2y^2 = 50 & (L_2 - L_1) \\ xy < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 50 \\ x \text{ et } y \text{ de signes différents} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -4 \\ y = 5 \text{ ou } y = -5 \\ x \text{ et } y \text{ de signes différents} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc $\delta = 4 - 5i$ ou $\delta = -4 + 5i$.

Ainsi, $\Delta = -9 - 40i = (4 - 5i)^2 \neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{6+i+4-5i}{2} = 1 + 3i \\ \text{et} \quad z_2 &= \frac{6+i-4+5i}{2} = 5 - 2i \end{aligned}$$

e) $4z^2 - z + 4 = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = -63 = (3i\sqrt{7})^2 \neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$z_1 = \frac{1-3i\sqrt{7}}{8} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+3i\sqrt{7}}{8}$$

f) $iz^2 + (-3+4i)z - 5+i = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = -3 - 4i = (-1 + 2i)^2 \neq 0$ (on trouve une racine carrée de Δ en utilisant la méthode habituelle ou en remarquant que

$$\Delta = -(3+4i) = i^2(3+4i) = i^2(2+i)^2 = [i(2+i)]^2 = (-1+2i)^2$$

où on a encore utilisé le résultat de la Question c) de l'Exercice 16). L'équation admet deux solutions complexes données par

$z_1 = -1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -3 - 2i$
--

Exercice 20 – Relations coefficients-racines. Trouver *sans calculs* les solutions des équations de degré deux suivantes.

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Notons x_1 et x_2 les racines du polynôme $x \mapsto x^2 + 8x + 15$. Grâce aux relations coefficients-racines, on sait que,

$$x_1 \times x_2 = 15 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 = -8$$

Ainsi, en résolvant de tête, on obtient que les deux racines du polynôme $x \mapsto x^2 + 8x + 15$ (ou autrement dit, les deux solutions de l'équation $x^2 + 8x + 15 = 0$) sont

$x_1 = -3$	et	$x_2 = -5$
------------	----	------------

b) $x^2 + 18x + 77 = 0$

En utilisant le même raisonnement, on obtient que l'équation $x^2 + 18x + 77 = 0$ admet deux solutions données par

-7	et	-11
------	----	-------

c) $x^2 - 8x - 33 = 0$

En utilisant le même raisonnement, on obtient que l'équation $x^2 - 8x - 33 = 0$ admet deux solutions données par

-3	et	11
------	----	------

3 Approfondissement

Exercice 21 – Factorisation de polynôme. Factoriser les polynômes suivants :

a) $x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 8$

On peut remarquer que -2 est une racine évidente. Ainsi, il existe a, b, c trois réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

En regardant le coefficient dominant et le coefficient constant, on trouve directement que $a = 1$ et $c = 4$. De plus, à droite, en développant, on remarque que le coefficient « devant le x^2 » va être $b + 2$. Ainsi, on doit prendre $b = -3$ pour que cela coïncide avec le polynôme de gauche. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x + 2)(x^2 - 3x + 4)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0 &\iff (x + 2)(x^2 - 3x + 4) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ est une équation du second degré. Comme son discriminant vaut $\Delta = -7 < 0$, elle n'admet pas de racines réelles, mais admet deux racines complexes données par

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

En résumé, l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0$ admet une unique solution réelle, donnée par -2 , et dans $\mathbb{R}$, le polynôme se factorise sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x + 2)(x^2 - 3x + 4)}$$

mais admet trois solutions complexes, données par

$$-2 \quad \text{et} \quad \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

et donc dans $\mathbb{C}$, le polynôme se factorise sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x + 2) \left(x - \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}\right) \left(x - \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}\right)}$$

b) $x \mapsto x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

De même, on montre que,

$$\begin{aligned} \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 5x^2 - 12x + 6} &= (x - 1)(x^2 + 6x - 6) \\ &= (x - 1)(x + 3 - \sqrt{15})(x + 3 + \sqrt{15}) \end{aligned}$$

en ayant calculer le discriminant et les racines du polynôme de second degré $x \mapsto x^2 + 6x - 6$.

Exercice 22 – Équation de degré trois. On considère l'équation (E) suivante :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de (E)} &\iff x^3 + (1+i)x^2 + (4-i)x + 12 - 6i = 0 \\ &\iff x^3 + x^2 - 4x + 12 + i(x^2 - x - 6) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x^3 + x^2 - 4x + 12 = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Or (grâce au discriminant ou aux relations coefficients-racines), on obtient que

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -2$$

Mais,

$$3^3 + 3^2 - 4 \times 3 + 12 = 60 \neq 0 \text{ et } (-2)^3 + (-2)^2 - 4 \times (-2) + 12 = 0$$

Donc x est solution de (E) si et seulement si $x = -2$. L'équation (E) admet donc une unique solution réelle qui vaut $\boxed{-2}$.

2. En déduire toutes les solutions de (E).

Comme -2 est une solution de (E) d'après la question précédente, il existe a, b, c trois nombres complexes tels que (factorisation dans $\mathbb{C}$):

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = (z+2)(az^2 + bz + c).$$

En identifiant les coefficients dominants, on trouve que $a = 1$; en identifiant les coefficients constants, on trouve que $c = 6 - 3i$; et enfin, en regardant les termes «devant z^2 », on trouve que $b = -1 + i$. Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = (z+2)(z^2 + (-1+i)z + 6 - 3i).$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0 &\iff (z+2)(z^2 + (-1+i)z + 6 - 3i) = 0 \\ &\iff z = -2 \text{ ou } z^2 + (-1+i)z + 6 - 3i = 0 \end{aligned}$$

Or, l'équation $z^2 + (-1+i)z + 6 - 3i = 0$ est une équation du second degré. On commence donc par calculer son discriminant, qui vaut $\Delta = -24 + 10i = (1 + 5i)^2 \neq 0$ (une racine carrée est déterminée grâce à la méthode usuelle qui n'est pas détaillée ici). Ainsi, l'équation du second degré $z^2 + (-1+i)z + 6 - 3i = 0$ admet deux racines complexes, données par,

$$z_1 = -3i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + 2i$$

Finalement,

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0 \iff z = -2 \text{ ou } z = -3i \text{ ou } z = 1 + 2i$$

L'équation (E) admet trois solutions complexes qui sont $\boxed{-2, -3i \text{ et } 1 + 2i}$.

Exercice 23 – Déterminer puis représenter l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

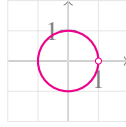
$$\frac{z+1}{z-1} \text{ soit imaginaire pur}$$

- **Méthode 1 : grâce à la caractérisation avec le conjugué.** Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ (pour que la quantité étudiée ait un sens). On a,

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \overline{\frac{z+1}{z-1}} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\iff \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\iff (\bar{z}+1) \times (z-1) = -(z+1)(\bar{z}-1) \\ &\iff \bar{z}z - \bar{z} + z - 1 = -(z\bar{z} - z + \bar{z} - 1) \\ &\iff \bar{z}z - \bar{z} + z - 1 = -z\bar{z} + z - \bar{z} + 1 \\ &\iff 2\bar{z}z = 2 \\ &\iff \bar{z}z = 1 \\ &\iff |z|^2 = 1 \\ &\iff |z| = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est donné par

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \setminus \{1\}$$



- **Méthode 2 : en calculant la partie réelle.** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. On a,

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{a+ib+1}{a+ib-1} \\ &= \frac{a+1+ib}{a-1+ib} \\ &= \frac{(a+1+ib)(a-1-ib)}{(a-1+ib)(a-1-ib)} \\ &= \frac{a^2+b^2-1-2ib}{(a-1)^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} + i \frac{-2b}{(a-1)^2+b^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \\ &\iff \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \\ &\iff a^2+b^2-1 = 0 \\ &\iff a^2+b^2 = 1 \\ &\iff |z|^2 = 1 \\ &\iff |z| = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est donné par

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \setminus \{1\}$$

Exercice 24 –

1. Soient z et z' deux nombres complexes tels que $1 + zz' \neq 0$, $|z| = 1$ et $|z'| = 1$. Montrer que

$$\frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$$

Posons $Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$. On a

$$\bar{Z} = \frac{\overline{z + z'}}{\overline{1 + zz'}} = \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{1 + \bar{z}\bar{z}'}$$

Or $|z| = 1$, donc $|z|^2 = z\bar{z} = 1$, et donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$. De même, $\bar{z}' = \frac{1}{z'}$. On a donc

$$\bar{Z} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{\frac{z z' + 1}{z z'}}{\frac{zz' + 1}{zz'}} = \frac{z' + z}{z z' + 1} = Z$$

Donc $Z \in \mathbb{R}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que

$$i \frac{z + 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$$

Posons $Z = i \frac{z + 1}{z - 1}$. On a

$$\bar{Z} = -i \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1}$$

Or, comme $|z| = 1$, $\bar{z}z = 1$, donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Donc

$$\bar{Z} = -i \frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z} - 1} = -i \frac{1 + z}{1 - z} = i \frac{z + 1}{z - 1} = Z$$

Donc $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^2$. Alors,

z est solution de $z^4 + z^2 - 6 = 0$ si et seulement si Z est solution de $Z^2 + Z - 6 = 0$.

Or

$$Z^2 + Z - 6 = (Z - 2)(Z + 3)$$

On en déduit que

Z est solution de $Z^2 + Z - 6 = 0$ si et seulement si $Z = -3$ ou $Z = 2$.

Donc,

$$\begin{aligned} \boxed{z \text{ est solution de } z^4 + z^2 - 6 = 0} &\iff z^2 = -3 \text{ ou } z^2 = 2 \\ &\iff \boxed{z = i\sqrt{3} \text{ ou } z = -i\sqrt{3} \text{ ou } z = \sqrt{2} \text{ ou } z = -\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exercice 26 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$. Montrer que $|x - u| = |1 - xu|$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$. On a,

$$\begin{aligned} |x - u| &= \left| u \left(\frac{1}{u} x - 1 \right) \right| \quad \text{car } u \neq 0 \\ &= |u| |x\bar{u} - 1| \quad \text{car } u\bar{u} = 1 \\ &= |\overline{x\bar{u} - 1}| \quad \text{car } |z| = |\bar{z}| \\ &= |\bar{x}u - 1| \\ &= |xu - 1| \quad \text{car } x \in \mathbb{R} \\ &= |1 - xu|. \end{aligned}$$

Exercice 27 –

1. Montrer l'identité du parallélogramme: pour tout $u, v \in \mathbb{C}$,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Soit $u, v \in \mathbb{C}$. On a

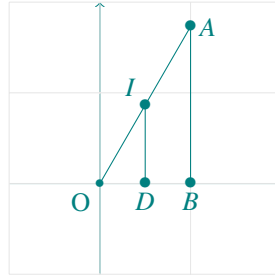
$$\begin{aligned} \boxed{|u+v|^2 + |u-v|^2} &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\ &= (u+v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u-v)(\bar{u} - \bar{v}) \\ &= u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u} - u\bar{v} - v\bar{u} + v\bar{v} \\ &= \boxed{2|u|^2 + 2|v|^2}. \end{aligned}$$

2. En donner une interprétation géométrique.

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

Exercice 28 – Oral TSI CCINP 2012. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le point A est le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$. On note I le milieu du segment $[OA]$.

1. Déterminer l'affixe du point I .



D'après le **théorème de Thalès**, on a,

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DI}{AB}$$

c'est-à-dire, si on note $x + iy$ l'affixe de I ,

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

(on a aussi utilisé que $|OA| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $OI = 1$ car I est le milieu du segment $[OA]$).
On obtient donc que,

$$\boxed{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

est l'affixe de I .

2. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = |z - z_A|$ est une droite passant par I .

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec x et y deux réels). On a,

$$\begin{aligned} \boxed{|z| = |z - z_A|} &\Leftrightarrow |z|^2 = |z - z_A|^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 \\ &\Leftrightarrow 0 = -2x + 4 - 2\sqrt{3}y \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La dernière équation décrit bien une droite passant par I car

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \bar{z} + 1 + i\sqrt{3}$$

- (a) Calculer $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_I)$.

On a,

$$\boxed{f(0) = 1 + i\sqrt{3}}$$

et

$$\boxed{f(z_A)} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} (1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} \boxed{= 3}$$

et

$$f(z_I) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 + i\sqrt{3} = 2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) Montrer que,

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{|f(z_1) - f(z_2)|} &= \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \overline{z_1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \overline{z_2} \right| \\ &= \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right| |\overline{z_1} - \overline{z_2}| \\ &= 1 \times |z_1 - z_2| \\ &\boxed{= |z_1 - z_2|} \end{aligned}$$