

TD 04 – Sommes, Produits, Coeff. Binomiaux

1 Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\dots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=1}^{20} k^3 & 2) \sum_{\ell=2}^8 \exp(\ell+1) \\ 3) \sum_{i=1}^n (-1)^i & 4) \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1) \end{array}$$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ .

$$\begin{array}{l} 1) 1+2^6+3^6+4^6+\dots+(n+1)^6 \text{ (pour un } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné)} \\ 2) 2+4+6+8+\dots+50 \\ 3) 1-a+a^2-a^3+\dots+a^{100} \text{ (pour un } a \in \mathbb{R}^* \text{ donné)} \end{array}$$

Exercice 3 – Somme d'une constante. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=1}^{10} 3 & 4) \sum_{i=1}^n 1 \\ 2) \sum_{j=n}^{n+10} 1 & 5) \sum_{\ell=0}^{21} 5 \\ 3) \sum_{k=p}^q (-1) & 6) \sum_{k=1}^n x \end{array}$$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=1}^6 k & 4) \sum_{\ell=1}^{10} \ell^2 \\ 2) \sum_{j=1}^{n-1} j & 5) \sum_{k=0}^6 k \\ 3) \sum_{k=1}^{n+1} k & 6) \sum_{k=1}^{n^2} k^2 \end{array}$$

Exercice 5 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=3}^{12} k & 3) \sum_{j=100}^{200} j \\ 2) \sum_{k=5}^n k^2 & 4) \sum_{k=p}^q k \end{array}$$

Exercice 6 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=1}^n (5k) & 3) \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) \\ 2) \sum_{k=0}^n (k-10) & 4) \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} \end{array}$$

Exercice 7 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=0}^n 2^k & 3) \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ 2) \sum_{k=1}^n 4^k & 4) \sum_{k=0}^n 1^k \end{array}$$

Exercice 8 – Sommes géométriques un peu cachée....

On rappelle les règles suivantes sur les puissances : pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*, p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ll} x^{p+q} = x^p \times x^q & \frac{1}{y^q} = \left(\frac{1}{y}\right)^q \\ \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p & x^{p \times q} = (x^p)^q = (x^q)^p \end{array}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} & 3) \sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3} \\ 2) \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k} & 4) \sum_{k=1}^n 2^{2k} \end{array}$$

Exercice 9 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{l} 1) 2+4+6+\dots+100 \\ 2) 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n \\ 3) 1+3+5+\dots+99 \\ 4) 2 \times 5^2 + 2 \times 5^3 + \dots + 2 \times 5^{2n+2} \end{array}$$

Exercice 10 – Somme télescopique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 11 – Sommes télescopiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$1) \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \quad 2) \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Exercice 12 – Changements d'indices. À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

$$a) \sum_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \frac{i}{i-1}$$

$$b) \sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{k=1}^{\dots} \dots$$

$$c) \sum_{i=2}^n (i-2) = \sum_{k=\dots}^{\dots} k$$

2 Produits

Exercice 13 – Calculer les produits suivants. On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qu'il se passe.

$$1) \prod_{k=0}^n 2 \quad 3) \prod_{\ell=1}^{n-1} 2^\ell \quad 5) \prod_{k=0}^{n-1} k^2 \quad 7) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$2) \prod_{k=1}^4 x \quad 4) \prod_{i=1}^n (-1)^i \quad 6) \prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} \quad 8) \prod_{k=0}^n \frac{2k+1}{2k+3}$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 14 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

$$a. \binom{7}{0} \quad b. \binom{8}{8} \quad c. \binom{25}{1}$$

$$d. \binom{25}{2} \quad e. \binom{25}{23} \quad f. \binom{10}{6}$$

Exercice 15 – Soit $n \geq 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n .

$$a. \binom{n}{1} \quad b. \binom{n}{2} \quad c. \binom{n}{3}$$

Exercice 16 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

$$1) 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9, \quad 3) 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$$

$$2) n(n-1)(n-2) \quad 4) 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$$

Exercice 17 – Trouver un moyen efficace pour calculer les nombres suivants.

$$a. \binom{8}{4} + \binom{8}{5} \quad b. \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$$

Exercice 18 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

$$a. \frac{n!}{(n+1)!} \quad b. \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

$$c. \frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}} \quad d. \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$$

Exercice 19 – Développement. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes

$$a. (a+b)^6 \quad b. (2-x)^5$$

$$c. (2x+1)^4 \quad d. (x^2+2)^3$$

Exercice 20 – Calcul de somme.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad 3. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Exercice 21 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

$$1) \prod_{j=1}^{n-1} j^2$$

$$2) \prod_{k=4}^n k^3$$

4 Sommes doubles

Exercice 22 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$a) S = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq p} (i+j)$$

$$b) V = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j$$

$$c) W = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} x^{i+j} \text{ (pour un } x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$$

5 Approfondissement

Exercice 23 –

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 24 – Oral MP 2018 Centrale.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^n p! = \prod_{p=1}^n p^{n+1-p}$$

2. En déduire que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^n \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^n p^{2p-n-1}$$