

TD 05 – Sommes, Prod., Coeff. Binomiaux (Correction)

1 Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\dots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

a) $\sum_{k=1}^{20} k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + 19^3 + 20^3$

b) $\sum_{\ell=2}^8 \exp(\ell + 1) = \exp(3) + \exp(4) + \dots + \exp(8) + \exp(9)$

c) $\sum_{i=1}^n (-1)^i = -1 + 1 + \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^n$

d) $\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1) = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n-1) + \ln(n)$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ .

1) $1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + \cdots + (n+1)^6 = \sum_{k=1}^{n+1} k^6$

2) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 50 = \sum_{k=1}^{25} 2k$

3) $1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{100} = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k a^k$

Exercice 3 – Somme d’une constante. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \sum_{k=1}^{10} 3 = 3 \times (10 - 1 + 1) = 3 \times 10 = 30$$

$$2) \sum_{j=n}^{n+10} 1 = 1 \times (n + 10 - n + 1) = 11$$

$$3) \sum_{k=p}^q (-1) = (-1) \times (q - p + 1) = p - q - 1$$

$$4) \sum_{i=1}^n 1 = 1 \times (n - 1 + 1) = n$$

$$5) \sum_{\ell=0}^{21} 5 = 5 \times (21 - 0 + 1) = 5 \times 22 = 110$$

$$6) \sum_{k=1}^n x = x \times (n - 1 + 1) = nx$$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \boxed{\sum_{k=1}^6 k} = \frac{6 \times 7}{2} = 3 \times 7 \boxed{= 21}$$

$$2) \boxed{\sum_{j=1}^{n-1} j} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$3) \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$4) \boxed{\sum_{\ell=1}^{10} \ell^2} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 \boxed{= 385}$$

$$5) \boxed{\sum_{k=0}^6 k} = \frac{6 \times 7}{2} = 3 \times 7 \boxed{= 21}$$

$$6) \boxed{\sum_{k=1}^{n^2} k^2} = \frac{n^2 \times (n^2+1) \times (2n^2+1)}{6}$$

Exercice 5 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Calculer les sommes suivantes.

a) On a, en rajoutant/retranchant les termes qui manquent

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{k=3}^{12} k} &= 3 + 4 + \dots + 12 \\
 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 12 - 1 - 2 \\
 &= \sum_{k=1}^{12} k - 1 - 2 \\
 &= \frac{12 \times 13}{2} - 3 \\
 &= 6 \times 13 - 3 \\
 &\boxed{= 75}
 \end{aligned}$$

b) On a, en rajoutant/retranchant les termes qui manquent

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{k=5}^n k^2} &= 5 + 6 + \dots + n^2 \\
 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n^2 - (1 + 2 + 3 + 4) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2 \\
 &\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 30}
 \end{aligned}$$

c) De même,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{j=100}^{200} j} &= 100 + 101 + \dots + 200 \\
 &= 1 + \dots + 99 + 100 + 101 + \dots + 200 - (1 + \dots + 99) \\
 &= \sum_{j=1}^{200} j - \sum_{j=1}^{99} j \\
 &= \frac{200 \times 201}{2} - \frac{99 \times 100}{2} \\
 &\boxed{= 15150}
 \end{aligned}$$

d) De même,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{k=p}^q k} &= p + p + 1 + \dots + q \\
 &= 1 + \dots + p - 1 + p + p + 1 + \dots + q - (1 + \dots + p - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^q k - \sum_{k=1}^{p-1} k \\
 &\boxed{= \frac{q \times (q+1)}{2} - \frac{(p-1) \times p}{2}}
 \end{aligned}$$

Exercice 6 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

$$1) \boxed{\sum_{k=1}^n (5k)} = 5 \sum_{k=1}^n k = 5 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \boxed{\sum_{k=0}^n (k-10)} = \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 10 = \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1)$$

$$3) \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} 1 = 2 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n+2$$

$$4) \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

Exercice 7 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \boxed{\sum_{k=0}^n 2^k} = 2^0 \times \frac{1-2^{n-0+1}}{1-2} = \boxed{2^{n+1} - 1}$$

$$2) \boxed{\sum_{k=1}^n 4^k} = 4^1 \times \frac{1-4^{n-1+1}}{1-4} = -\frac{4}{3} \times (1-4^n)$$

$$3) \boxed{\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-2+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$4) \boxed{\sum_{k=0}^n 1^k} = \sum_{k=0}^n 1 = 1 \times (n-0+1) = \boxed{n+1}$$

Exercice 8 – Sommes géométriques un peu cachée.... Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les règles sur les puissances, calculer les sommes suivantes.

a) On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3} \\ &= \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k}} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10-1+1}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right) \end{aligned}$$

c) On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3}} &= \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \times 2^3 \\ &= 2^3 \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \\ &= 8 \times 2^2 \times \frac{1 - 2^{n+1-2+1}}{1 - 2} \\ &= 32 \times (2^n - 1) \end{aligned}$$

d) On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=1}^n 2^{2k}} &= \sum_{k=1}^n (2^2)^k \\ &= \sum_{k=1}^n 4^k \\ &= 4^1 \times \frac{1 - 4^{n-1+1}}{1 - 4} \\ &= -\frac{4}{3} (1 - 4^n) \end{aligned}$$

Exercice 9 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

a) On peut remarquer que

$$\begin{aligned}\boxed{2+4+6+\cdots+100} &= \sum_{k=1}^{50} (2k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{50} k \\ &= 2 \times \frac{50 \times 51}{2} \\ &= \boxed{2550}\end{aligned}$$

b) On peut commencer par remarquer que

$$1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-x)^k$$

Ainsi,

- Si $x = -1$, on reconnaît la somme d'une constante,

$$\boxed{1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n} = \sum_{k=0}^n 1^k \sum_{k=0}^n 1 = 1 \times (n - 0 + 1) = \boxed{n + 1}$$

- Si $x \neq -1$, on reconnaît une somme géométrique et alors,

$$\boxed{1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n} = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = \boxed{\frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x}}$$

c) On a,

$$\begin{aligned}\boxed{1+3+5\cdots+99} &= \sum_{k=0}^{49} (2k+1) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{49} k + \sum_{k=0}^{49} 1 \\ &= 2 \times \frac{49 \times 50}{2} + 1 \times (49 - 0 + 1) \\ &= 50 \times (49 + 1) \\ &= 50 \times 50 \\ &= \boxed{2500}\end{aligned}$$

d) On a,

$$\begin{aligned}\boxed{2 \times 5^2 + 2 \times 5^3 + \cdots + 2 \times 5^{2n+2}} &= \sum_{k=2}^{2n+2} 2 \times 5^k \\ &= 2 \sum_{k=2}^{2n+2} 5^k \\ &= 2 \times 5^2 \frac{1 - 5^{2n+1}}{1 - 5} \\ &= \boxed{\frac{25}{2} (5^{2n+1} - 1)}\end{aligned}$$

Exercice 10 – Somme télescopique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. En mettant au même dénominateur,

$$\boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = \boxed{\frac{1}{x+1}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} && \text{en reconnaissant un télescope} \\ &= \boxed{1 - \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

Exercice 11 – Sommes télescopiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$1) \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad 2) \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescope (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)} &= \sum_{k=1}^n \ln(k) - \ln(k+1) \\ &= \ln(1) - \ln(n+1) \\ &= \boxed{-\ln(n+1)} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}} &= \sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}}{(\sqrt{i} + \sqrt{i+1})(\sqrt{i} - \sqrt{i+1})} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}}{(i - (i+1))} \\ &= \sum_{i=0}^n -(\sqrt{i} - \sqrt{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{i+1} - \sqrt{i} \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{0} \\ &= \boxed{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Exercice 12 – Changements d’indices. À l’aide d’un changement d’indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

a) On a,

$$\boxed{\sum_{k=2}^n \frac{k+1}{k}} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} = \boxed{\sum_{i=3}^{n+1} \frac{i}{i-1}}$$

b) On a,

$$\boxed{\sum_{i=0}^n 2^i} = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}}$$

c) On a,

$$\boxed{\sum_{i=2}^n (i-2)} = 0 + 1 + 2 + \cdots + n-2 = \boxed{\sum_{k=0}^{n-2} k}$$

2 Produits

Exercice 13 – Calculer les produits suivants. On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qu'il se passe.

$$\text{a) } \prod_{k=0}^n 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-0+1} = 2^{n+1} \quad (\text{produit d'une constante})$$

$$\text{b) } \prod_{k=1}^4 x = x \times x \times x \times x = x^4 \quad (\text{produit d'une constante})$$

$$\text{c) } \prod_{\ell=1}^{n-1} 2^\ell = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-1} = 2^{1+2+\cdots+n-1} = 2^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\text{d) } \prod_{i=1}^n (-1)^i = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{e) } \prod_{k=0}^{n-1} k^2 = 0 \times 1 \times \cdots \times (n-1) = 0$$

$$\text{f) } \prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} = \frac{14}{13} \times \frac{15}{14} \times \cdots \times \frac{56}{55} \times \frac{57}{56} = \frac{57}{13} \quad (\text{par télescopage})$$

$$\text{g) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \quad (\text{par télescopage})$$

$$\text{h) } \prod_{k=0}^n \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2n+3} \quad (\text{par télescopage})$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 14 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

a) $\boxed{\binom{7}{0} = 1}$ (valeur particulière)

b) $\boxed{\binom{8}{8} = 1}$ (valeur particulière)

c) $\boxed{\binom{25}{1} = 25}$ (valeur particulière)

d) $\boxed{\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!23!} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times 23 \times 24 \times 25}{1 \times 2 \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times 23} = \frac{25 \times 24}{2} = 25 \times 12 = 300}$

e) $\boxed{\binom{25}{23} = \binom{25}{25-23} = \binom{25}{2} = 300}$ (en utilisant les propriétés de symétrie et la question d))

f) $\boxed{\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \times \cancel{8} \times 9 \times 10}{1 \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{4}} = 7 \times 3 \times 10 = 210}$

Exercice 15 – Soit $n \geq 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n .

a) $\boxed{\binom{n}{1}} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(n-1)} \times n}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(n-1)}} = n$ (c'est aussi une valeur particulière)

b) $\boxed{\binom{n}{2}} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(n-2)} \times (n-1) \times n}{2! \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(n-2)}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

c) En faisant de même, $\boxed{\binom{n}{3}} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$

Exercice 16 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

$$\text{a) } 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{4!}$$

$$\text{b) } n(n-1)(n-2) = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-3)} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\text{c) } 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = 2^n n! \quad (\text{cf exemple de cours})$$

$$\text{d) } 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \quad \text{en utilisant la réponse c)}$$

Exercice 17 – Trouver un moyen *efficace* pour calculer les nombres suivants.

a) On a, en utilisant la **formule de Pascal**,

$$\boxed{\binom{8}{4} + \binom{8}{5}} = \binom{9}{5} \boxed{= 126}$$

b) On a, en utilisant plusieurs fois la **formule de Pascal**,

$$\begin{aligned} \boxed{\binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}} &= \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} \\ &= \binom{11}{4} + \binom{11}{5} \\ &= \binom{12}{5} \\ &= 8 \times 9 \times 11 \\ &\boxed{= 792} \end{aligned}$$

Exercice 18 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

$$\text{a) } \boxed{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{n}}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{n} \times (n+1)} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{b) } \boxed{\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(2n-1)} \times (2n) \times (2n+1)}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \dots \times \cancel{(2n-1)}} = \boxed{(2n)(2n+1)}$$

$$\text{c) } \boxed{\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}} = \frac{(n+1)!}{n!1!} \times \frac{1!(n-1)!}{n!} = (n+1) \times \frac{1}{n} = \boxed{\frac{n+1}{n}}$$

d) On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}} &= \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(p-1)!(n-p)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{(p-1)!}{p!} \\ &= n \times \frac{1}{p} \\ &= \boxed{\frac{n}{p}} \end{aligned}$$

Exercice 19 – Développement. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes.

Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. En appliquant la **formule du binôme de Newton**, on obtient,

a)
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

b)
$$(2-x)^5 = 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$$

c)
$$(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

d)
$$(x^2+2)^3 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

Exercice 20 – Calcul de somme.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a, en appliquant le **binôme de Newton**,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \mathbf{1}^{n-k} = \boxed{(x+1)^n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

a) $\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k} = (2+1)^n = \boxed{3^n}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = 2$)

b) $\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k} = (-1+2)^n = 0^n = \boxed{0}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = -1$)

c) $\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{1}^k = (1+1)^n = \boxed{2^n}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = 1$)

Exercice 21 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

$$\text{a) } \prod_{j=1}^{n-1} j^2 = 1^2 \times 2^2 \times \cdots \times (n-1)^2 = [1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)]^2 = [(n-1)!]^2$$

$$\text{b) } \prod_{k=4}^n k^3 = 4^3 \times 4^3 \times \cdots \times n^3 = \frac{1^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times \cdots \times n^3}{1^3 \times 2^3 \times 3^3} = \frac{[1 \times \cdots \times n]^3}{[1 \times 2 \times 3]^3} = \frac{n!^3}{3!^3}$$

4 Sommes

doubles

Exercice 22 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (i + j)$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{S} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p (i + j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p i + \sum_{j=1}^p j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(i \times p + \frac{p(p+1)}{2} \right) \\ &= p \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{p(p+1)}{2} \\ &= p \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} \times (n-1+1) \\ &= \frac{np}{2} (n+p+2) \end{aligned}$$

b) $V = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{V} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

c) $W = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x^{i+j}$ (pour un $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$)

Soit $x \neq 1$. On a,

$$\begin{aligned}
 \boxed{W} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x^i \times x^j \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x^i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n x^j \right) \\
 &= \left(x^1 \times \frac{1 - x^{n-1+1}}{1 - x} \right) \times \left(x^1 \times \frac{1 - x^{n-1+1}}{1 - x} \right) \\
 &= \left(x \times \frac{1 - x^n}{1 - x} \right)^2
 \end{aligned}$$

5 Approfondissement

Exercice 23 –

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)} + \frac{bk(k+2)}{k(k+1)(k+2)} + \frac{ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{ak^2 + 3ak + 2a + bk^2 + 2bk + ck^2 + ck}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a \\ &\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Pour calculer cette somme, on va faire apparaître deux sommes télescopiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &\boxed{= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)}
 \end{aligned}$$

Exercice 24 – Oral MP 2018 Centrale.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^n p! = \prod_{p=1}^n p^{n+1-p}$$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\prod_{p=0}^n p!} &= \prod_{p=1}^n p! \quad \text{car } 0! = 1 \\ &= \prod_{p=1}^n \left(\prod_{k=1}^p k \right) \quad \text{definition } p! \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\prod_{p=k}^n k \right) \quad \text{intersion des deux produits} \\ &= \prod_{k=1}^n k^{n-k+1} \quad \text{calcul du produit «à l'intérieur»} \\ &= \boxed{\prod_{p=1}^n p^{n+1-p}} \quad \text{renomage de la variable muette} \end{aligned}$$

2. En déduire que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^n \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^n p^{2p-n-1}$$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\prod_{p=0}^n \binom{n}{p}} &= \prod_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= n!^{n-1} \frac{1}{\prod_{p=0}^n p! \times \prod_{p=0}^n (n-p)!} \\ &= n!^{n-1} \frac{1}{\prod_{p=0}^n p! \times \prod_{p=0}^n p!} \\ &= n!^{n-1} \frac{1}{\left(\prod_{p=0}^n p! \right)^2} \\ &= n!^{n-1} \frac{1}{\left(\prod_{p=1}^n p^{n+1-p} \right)^2} \\ &= n!^{n-1} \prod_{p=1}^n p^{-2(n+1-p)} \\ &= \prod_{p=1}^n p^{n-1} \times \prod_{p=1}^n p^{-2(n+1-p)} \\ &= \boxed{\prod_{p=1}^n p^{2p-n-1}} \end{aligned}$$