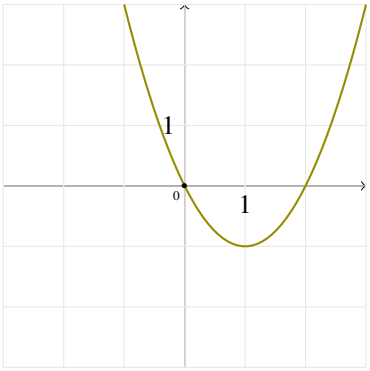
TD 05 – Fonctions bijectives

1 Fonctions bijectives

Exercice 1 – Représentation graphique. La fonction représentée ci-dessous est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ vers $[-1,+\infty[$? de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$? de $[1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$?



Exercice 2 – Attention aux ensembles !. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.
2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.
3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application h est bijective de E vers F et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3 – Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} (avec la méthode 1). En «intuitant» la bijection réciproque, montrer que les fonctions suivantes sont bijectives (en précisant les ensembles associés) et donner leur bijection réciproque.

a) $f_1 : x \mapsto -x$

b) $f_2 : x \mapsto 2x-5$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

d) $f_4 : x \mapsto x|x|$

Exercice 4 – Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} (avec la méthode 2).

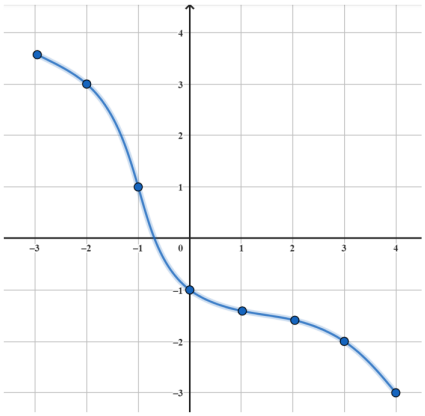
1. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \longmapsto & 3-\frac{1}{x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et calculer f^{-1}.
2. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,1[\\ & x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[-1,1[$ et calculer f^{-1}.
3. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2+2x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et calculer f^{-1}.

Exercice 5 – À partir du tableau de variations. On considère le tableau de variations suivant d'une fonction f, supposée continue. (Ici, les flèches montantes/descendantes désignent de la stricte croissance/décroissance.)

x	$-\infty$		-2		0		1		2		10	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	2	$+\infty$

1. Donner l'image directe $f(\mathbb{R})$, puis $f([1,2])$ et $f(]-\infty,1])$.
2. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[-3,+\infty[$?
3. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $\mathbb{R}$?
4. La fonction f réalise une bijection de $[0,2]$ sur quel intervalle?
5. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser. On note alors φ sa bijection réciproque.
   (a) Que vaut $\varphi(0)$? $\varphi(1)$? $\varphi(2)$?
   (b) Quel est le sens de variation de φ sur son domaine de définition?
   (c) Donner un encadrement de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6 – Informations graphiques. On considère la représentation graphique d'une fonction f ci-dessous. On répondra aux questions directement par lecture graphique avec des valeurs approchées.



1. Que vaut $f([0,3])$?
2. La fonction f réalise une bijection de quel intervalle sur quel intervalle? On note g la bijection réciproque.
3. Expliquer comment obtenir la représentation graphique de g et la tracer ci-contre.
4. Quel est le sens de variation de g?
5. Déterminer $g(-2)$ et $g(-1)$.
6. Déterminer $g([-1,3])$.

Exercice 7 – Calcul d'images directes (sans stricte monotonie). À l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau de variations, donner les images directes suivantes.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-1,2])$?

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f(]-1,1])$?

c) Pour $f : x \mapsto 2x^2-8x+6$, que vaut $f(\mathbb{R})$?

Exercice 8 – Calcul d'images directes (avec stricte monotonie). Après avoir rapidement vérifier que les fonctions sont strictement monotones sur les intervalles considérés, déterminer les images directes données en calculant les valeurs/limites aux bornes de l'intervalle.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3])$?

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3[)$?

c) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-3,-1[)$?

d) Pour $f : x \mapsto x^3$, que vaut $f([0,+\infty[)$?

e) Pour $f : x \mapsto \ln(x)$, que vaut $f(]0,1[)$?

Exercice 9 – Théorème de la bijection (méthode 3). *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $f : x \mapsto x\exp(x)$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.
2. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 10 – Oral CCINP TSI 2023. On pose,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\tan(x) - x$$

On admet que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

Montrer que f est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle à déterminer et que sa bijection réciproque est impaire.

Exercice 11 – Résolution d'une équation. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que l'équation $x^3+2x-1=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que l'équation $x\ln(x)=1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$, puis que $1<\alpha<\mathrm{e}$.

Exercice 12 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f : x \longmapsto x+\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 13 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto x\mathrm{e}^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser l'équation de la tangente en 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble J à déterminer. On note φ sa bijection réciproque.
3. Déterminer $\varphi(\mathrm{e})$.
4. Justifier que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(\mathrm{e})$.

Exercice 14 – Dérivabilité de la fonction réciproque. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto x+\ln(x)+2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser. On note f^{-1} la bijection réciproque, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
2. Dresser le tableau de variation de f^{-1} en précisant les valeurs remarquables et les limites.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse 1.
4. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point N d'abscisse 3.
5. Construire sur un même graphique $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$, T et T'.
6. Montrer que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$$

2 Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 15 – (ln)équations avec ln et exp. Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.

$\ln(x) = -7$	☐	☐	$x \geqslant 1$
$\exp(x) = 4$	☐	☐	$x \leqslant \frac{1}{4}(\mathrm{e}^3+1)$
$\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)$	☐	☐	e^{-7}
$\mathrm{e}^{-3x+5} < 2$	☐	☐	$x > -\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{5}{3}$
$\ln(4x-1) \leqslant 3$	☐	☐	$\ln(4)$

Exercice 16 – Calculs algébriques sur ln et exp. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

   a) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\ln(8)+5\ln(2)$
   c) $\ln(\sqrt{32})$ d) $\ln(10)-\ln(20)$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^5 \times e^2 \times \mathrm{e}^{-3}$ b) $\mathrm{e}^3 \times (\mathrm{e}^{-4})^2$
   c) $\frac{\mathrm{e}^4\times\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}}$ d) $\frac{\mathrm{e}\times(\mathrm{e}^5)^7}{\mathrm{e}^{-9}\times\mathrm{e}^4}$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $\mathrm{e}^{2\ln 3+\ln 4}$ b) $\mathrm{e}^{3\ln 2-\ln 4}$
   c) $\frac{\mathrm{e}^{\ln 6+1}}{\mathrm{e}^{\ln 9+2}}$ d) $\mathrm{e}^{3\ln 3}+\mathrm{e}^{2\ln 7}$
   e) $\mathrm{e}^{5\ln 3}\times\mathrm{e}^{4\ln 9}$ f) $\ln(1+\mathrm{e}^5)+\ln\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\right)$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

   a) $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}}$ b) $\frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$
   c) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}$ d) $-\ln(2x)-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   e) $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{-x}$ f) $\frac{\mathrm{e}^{x^2-2x}\times(\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions A et B et factoriser les expressions C (par e^{-4x}) et D (par e^x-3x).

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{e}^{2x}+5)^2 \\ B &= (\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{-x}+5) \\ C &= 5\mathrm{e}^{-4x}-3\mathrm{e}^{-4x}+7\mathrm{e}^{-4x} \\ D &= \mathrm{e}^{2x}-9x^2 \end{aligned}$$