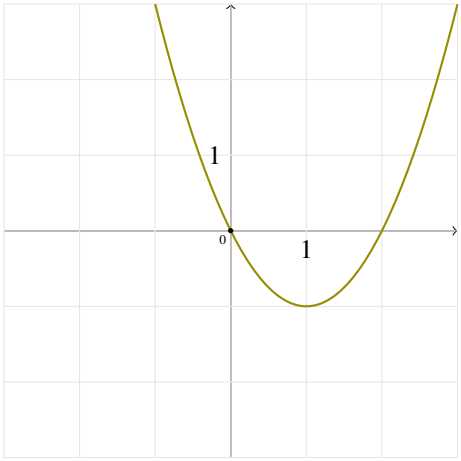
TD 05 – Fonctions bijectives (Correction)

1 Fonctions bijectives

Exercice 1 – Représentation graphique. La fonction représentée ci-dessous est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ vers $[-1,+\infty[$? de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$? de $[1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$?



- La fonction n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple, car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et 2.
- La fonction n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,+\infty[$, par exemple, car l'élément $0 \in [-1,+\infty[$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et 2.
- La fonction n'est pas bijective de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, par exemple, car l'élément $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $[1,+\infty[$.
- La fonction est bijective de $[1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ car tout élément de $[-1,+\infty[$ admet un unique antécédent dans $[1,+\infty[$.

Exercice 2 – Attention aux ensembles !. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.

   La fonction h n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car l'élément $2\in\mathbb{R}$ admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$ (qui sont 1 et -1).

2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application h n'est pas bijective de E vers F.

   La fonction h n'est pas bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ car l'élément $0\in\mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ (car l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}_+$).

3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application h est bijective de E vers F.

   Soit $y\in[1,+\infty[$. On sait que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

   $$\begin{aligned} y=h(x) &\Leftrightarrow y=x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x^2=y-1 \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1} \text{ ou } x=-\sqrt{y-1} \ \ (\text{car } y-1\geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1} \ \ (\text{car } x\geqslant 0) \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $y\in[1,+\infty[$, l'équation $y=h(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application h est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[1,+\infty[$.

Exercice 3 – Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} (avec la méthode 1). En «intuitant» la bijection réciproque, montrer que les fonctions suivantes sont bijectives (en précisant les ensembles associés) et donner leur bijection réciproque.

a) $f_1 : x \mapsto -x$

Notons $g_1 : x \mapsto -x$. Alors, on a directement que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_1(g_1(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ g_1(f_1(x)) = x$$

Donc $\boxed{f_1 \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et sa bijection réciproque est } g_1.}$

b) $f_2 : x \mapsto 2x - 5$

De même, on montre que $\boxed{f_2 \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et sa bijection réciproque est } g_2 : x \mapsto \frac{x+5}{2}.}$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

De même, on montre que $\boxed{f_3 \text{ est bijective de } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et sa bijection réciproque est } g_3 : x \mapsto \frac{1}{x} - 1.}$

d) $f_4 : x \mapsto x|x|$

Soit $g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad g_4(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Montrons que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \ f_4(g_4(y)) = y$$

Raisonnons par disjonction de cas.

- Si $y \geq 0$, alors,
$$f_4(g_4(y)) = f_4(\sqrt{y}) = \sqrt{y}|\sqrt{y}| = \sqrt{y}\sqrt{y} = y$$
- Si $y < 0$, alors,
$$f_4(g_4(y)) = f_4(-\sqrt{-y}) = \sqrt{-y}|-\sqrt{-y}| = \sqrt{-y}\sqrt{-y} = y$$

De même, on montre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g_4(f_4(x)) = x$$

Donc $\boxed{f_4 \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et sa bijection réciproque est } g_4.}$

Exercice 4 – Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} (avec la méthode 2).

1. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \longmapsto & 3-\frac{1}{x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et calculer f^{-1}.

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$,
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 3 - \frac{1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow (x+2)y = 3(x+2) - 1 \text{ car } x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow xy + 2y = 3x + 5 \\ &\Leftrightarrow x(3-y) = 2y - 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y-5}{3-y} \text{ car } y \neq 3 \end{aligned}$$
Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R}\setminus\{-2\} \text{ vers } \mathbb{R}\setminus\{3\}}$ et sa bijection réciproque est donnée par
$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\ & y & \longmapsto & \frac{2y-5}{3-y} \end{array}}$$

2. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,1[\\ & x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[-1,1[$ et calculer f^{-1}.

Soit $y \in [-1,1[$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (\ldots) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y} \text{ car } y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \text{ car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$
Donc, pour tout $y \in [-1,1[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } [-1,1[}$ et sa bijection réciproque est donnée par
$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & y & \longmapsto & \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \end{array}}$$

3. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2+2x+2} \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et calculer f^{-1}.

Soit $y \in [1,+\infty[$. On sait que, pour tout $x \in [-1,+\infty[$,
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+2x+x} \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2+2x+2 \qquad \text{car tous les termes sont } \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+2-y^2 = 0 \end{aligned}$$

On est face à une équation de second degré dont le discriminant est donné par

$$\Delta = 4(-1+y^2) \geqslant 0 \qquad \text{car } y \geqslant 1$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions (sauf si $y = 1$, auquel elle admet une unique solution et donc c'est bon) qui valent

$$x_1 = -1 - \sqrt{-1+y^2} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{-1+y^2}$$

On remarque que $x_1 \leqslant -1$ et $x_2 \geqslant -1$. Donc, en ne gardant que la "solution qui est au bon endroit", on obtient

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{-1+y^2}$$

Donc, pour tout $y \in [1, +\infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $[-1, +\infty[$. Ainsi, l'application f est $\boxed{\text{bijective de } [-1, +\infty[\text{ vers } [1, +\infty[}$ et sa bijection réciproque est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1} : & [1, +\infty[& \longrightarrow & [-1, +\infty[\\ & y & \longmapsto & -1 + \sqrt{-1+y^2} \end{array}}$$

Exercice 5 – À partir du tableau de variations. On considère le tableau de variations suivant d'une fonction f, supposée continue. (Ici, les flèches montantes/descendantes désignent de la stricte croissance/décroissance.)

x	$-\infty$	-2	0	1	2	10	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3	↗ -1	↘ 0	↗ 1	↗ 2	$+\infty$

1. Donner l'image directe $f(\mathbb{R})$, puis $f([1,2])$ et $f(]-\infty,1])$.

   On a,

   $$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-3,+\infty[}$$
   $$\boxed{f([1,2]) = [0,1]}$$
   $$\boxed{f(]-\infty,1]) = [-3,+\infty[}$$

2. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[-3,+\infty[$?

   La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } [-3,+\infty[}$ car par exemple, l'élément $0 \in [-3,+\infty[$ admet deux antécédents sur $\mathbb{R}$ (un qui vaut 1 et l'autre dans $]-\infty,-3[$.

3. La fonction f réalise-t-elle une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $\mathbb{R}$?

   La fonction n'est $\boxed{\text{pas bijective de }]-\infty,-2] \text{ sur } \mathbb{R}}$ car par exemple, l'élément $-4 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $]-\infty,-2]$.

4. La fonction f réalise une bijection de $[0,2]$ sur quel intervalle?

   La fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [0,2] \text{ sur } [-1,1].}$

5. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.

   On sait que
   ① L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}_+$ (admis dans l'énoncé)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le tableau de variations).
   Donc, d'après le tableau de variations, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ vers } f(\mathbb{R}_+) = [-1,+\infty[.}$$

On note alors φ sa bijection réciproque.

(a) Que vaut $\varphi(0)$? $\varphi(1)$? $\varphi(2)$?

- On sait que $f(1) = 0$ donc $\boxed{\varphi(0) = 1.}$
- On sait que $f(2) = 1$ donc $\boxed{\varphi(1) = 2.}$
- On sait que $f(10) = 2$ donc $\boxed{\varphi(2) = 10.}$

(b) Quel est le sens de variation de φ sur son domaine de définition?

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sa bijection réciproque φ est $\boxed{\text{strictement croissante sur } [-1,+\infty[.}$

(c) Donner un encadrement de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

On sait que

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$$

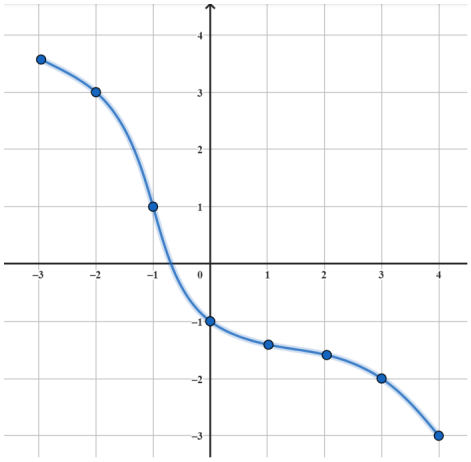
Donc, comme la fonction φ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on en déduit que

$$\varphi(0) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \varphi(1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{1 \leqslant \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant 2}$$

Exercice 6 – Informations graphiques. On considère la représentation graphique d'une fonction f ci-dessous. On répondra aux questions directement par lecture graphique avec des valeurs approchées.



1. Que vaut $f([0,3])$?

   D'après le graphe, on voit que $\boxed{f([0,3]) = [-2,-1]}$

2. La fonction f réalise une bijection de quel intervalle sur quel intervalle? On note g la bijection réciproque.

   La fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [-3,4] \text{ sur } [-3,3.5].}$

3. Expliquer comment obtenir la représentation graphique de g et la tracer ci-contre.

   Les graphes de f et g sont $\boxed{\text{symétriques}}$ l'un de l'autre $\boxed{\text{par rapport à la droite d'équation } y = x.}$

4. Quel est le sens de variation de g?

   La fonction f est strictement décroissante sur $[-3,4]$.
   Donc la fonction g est $\boxed{\text{strictement décroissante sur } [-3,3.5].}$

5. Déterminer $g(-2)$ et $g(-1)$.

   On sait que $f(3) = -2$ donc $\boxed{g(-2) = 3.}$ On sait aussi que $f(0) = -1$ donc $\boxed{g(-1) = 0.}$

6. Déterminer $g([-1,3])$.

   Comme g est strictement décroissante sur $[-3,3.5]$, on a directement que

   $$\boxed{g([-1,3])} = [g(3), g(-1)] \boxed{= [-2,0]}$$

Exercice 7 – Calcul d'images directes (sans stricte monotonie). À l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau de variations, donner les images directes suivantes.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-1,2])$? $\boxed{f([-1,2]) = [0,4]}$

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f(]-1,1])$? $\boxed{f(]-1,1]) = [0,1]}$

c) Pour $f : x \mapsto 2x^2 - 8x + 6$, que vaut $f(\mathbb{R})$? $\boxed{f(\mathbb{R}) = [-2,+\infty[}$

Exercice 8 – Calcul d'images directes (avec stricte monotonie). Après avoir rapidement vérifier que les fonctions sont strictement monotones sur les intervalles considérés, déterminer les images directes données en calculant les valeurs/limites aux bornes de l'intervalle.

a) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3])$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement croissante sur** $[0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [1,9]}$$

b) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([1,3[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement croissante sur** $[0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f([1,3[) = [f(1), f(3)[= [1,9[}$$

c) Pour $f : x \mapsto x^2$, que vaut $f([-3,-1[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est **strictement décroissante sur** $]-\infty,0]$, on a,

$$\boxed{f([-3,-1[) =]f(-1), f(-3)] =]1,9]}$$

d) Pour $f : x \mapsto x^3$, que vaut $f([0,+\infty[)$?

Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$, on a,

$$\boxed{f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} x^3[= [0,+\infty[}$$

e) Pour $f : x \mapsto \ln(x)$, que vaut $f(]0,1[)$?

Comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$, on a,

$$\boxed{f(]0,1[) =]\lim_{x\to0^+} \ln(x), f(1)[=]-\infty,0[}$$

Exercice 9 – Théorème de la bijection (méthode 3). *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $f : x \mapsto x\exp(x)$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

   On sait que
   ① L'ensemble $[-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $[-1,+\infty[$ (par produit)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $[-1,+\infty[$ car la fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et
   $$\forall x \geqslant -1,\ f'(x) = (x+1)\exp(x) > 0$$
   (sauf pour $x = -1$).

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } f([-1,+\infty[) = [-\mathrm{e}^{-1},+\infty[.}$$

2. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

   On sait que
   ① L'ensemble $[-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   ② La fonction f est **continue** sur $[-1,+\infty[$ (par composition)
   ③ La fonction f est **strictement croissante** sur $[-1,+\infty[$ car la fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et
   $$\forall x \geqslant -1,\ f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} > 0$$
   (sauf pour $x = -1$).

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } f([-1,+\infty[) = [\ 1\ ,+\infty[.}$$

Exercice 10 – Oral CCINP TSI 2023. On pose,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\tan(x) - x$$

On admet que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

Montrer que f est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle à déterminer et que sa bijection réciproque est impaire.

On sait que

① L'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un **intervalle**.
② La fonction f est **continue** sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
③ La fonction f est **strictement croissante** sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) = 2(1+\tan^2(x)) - 1 = 1 + 2\tan^2(x) > 0$$

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une

$$\boxed{\text{bijection de } \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\text{ vers } f\left(\left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.}$$

Notons $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la bijection réciproque de f et montrons que f^{-1} est impaire. Déjà, on peut remarquer que f est impaire (en utilisant la parité du cosinus, et l'imparité du sinus). Ainsi,

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad f(-x) = -f(x)$$

Montrons que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme f est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$,

$$\exists x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad y = f(x) \qquad \text{et donc } x = f^{-1}(y)$$

On peut remarquer aussi, grâce à l'imparité de f que

$$-y = -f(x) = f(-x)$$

Ainsi, on a,

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

Donc f^{-1} est impaire.

Exercice 11 – Résolution d'une équation (méthode 3). *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que l'équation $x^3+2x-1=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$.

   Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,x\longmapsto x^3+2x-1$. Pour tout $x\in]0,1[$, on a

   $$x^3+2x-1=0 \iff f(x)=0$$

   Montrons que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f(]0,1[)$.

   - L'ensemble $]0,1[$ est un **intervalle**.
   - La fonction f est **continue sur** $]0,1[$ (comme fonction polynomiale)
   - Montrons que f est strictement monotone sur $]0,1[$. La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et
     $$\forall x\in]0,1[,\quad f'(x)=3x^2+2>0$$
     Donc f est **strictement croissante sur** $]0,1[$**.**

   D'après le **théorème de la bijection**, f réalise donc une

   $$\boxed{\text{bijection de }]0,1[\text{ sur } f(]0,1[)=]-1,2[.}$$

   Comme $0\in]-1,2[$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0,1[$ (autrement dit, 0 a un unique antécédent par f dans $]0,1[$).

   Donc $\boxed{\text{l'équation } x^3+2x-1=0 \text{ admet une unique solution dans }]0,1[.}$

2. Montrer que l'équation $x\ln(x)=1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$.

   Soit $f:]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,x\longmapsto x\ln(x)$. Pour tout $x\in]1,+\infty[$, on a

   $$x\ln(x)=1 \iff f(x)=1$$

   Montrons que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f(]1,+\infty[)$.

   - L'ensemble $]1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   - La fonction f est **continue sur** $]1,+\infty[$ (comme produit de fonctions qui le sont).
   - Montrons que f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et
     $$\forall x\in]1,+\infty[,\quad f'(x)=\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1>0$$
     Donc f est **strictement croissante sur** $]1,+\infty[$**.**

   D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une

   $$\boxed{\text{bijection de }]1,+\infty[\text{ sur } f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[.}$$

   Comme $1\in]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$ (autrement dit, 1 a un unique antécédent par f dans $]1,+\infty[$).

   Donc $\boxed{\text{l'équation } x\ln(x)=1 \text{ admet une unique solution dans }]1,+\infty[.}$

3. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$, puis que $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \ln(x) - \mathrm{e}^{-x}$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\ln(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \iff f(x) = 0$$

Montrons que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)$.

- L'ensemble $]0,+\infty[$ est un **intervalle**.
- La fonction f est **continue sur** $]0,+\infty[$ (comme somme de fonctions qui le sont).
- Montrons que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f'(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{e}^{-x} > 0$$
Donc f est **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$**.**

D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une

$$\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.}$$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ (autrement dit, 0 a un unique antécédent par f dans $]0,+\infty[$).

Donc $\boxed{\text{l'équation } \ln(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \text{ admet une unique solution dans }]0,+\infty[, \text{ que l'on note } \alpha.}$

Montrons que $1 < \alpha < \mathrm{e}$. Par construction, $\alpha \in]0,+\infty[$, c'est-à-dire $\alpha > 0$. Or, comme la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on sait que

$$1 < \alpha < \mathrm{e} \iff f(1) < f(\alpha) < f(\mathrm{e}) \iff -\mathrm{e}^{-1} < 0 < 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$$

Or la dernière inégalité est vraie*. Donc, par équivalence, la première inégalité est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{1 < \alpha < \mathrm{e}}$$

*En effet, par positivité de l'exponentielle, on sait que $-\mathrm{e}^{-1} < 0$. De plus,

$$\begin{array}{lll} & \mathrm{e} > 0 & \\ \text{donc} & -\mathrm{e} < 0 & \\ \text{donc} & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} < 1 & \text{car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 0 < 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} & \end{array}$$

Exercice 12 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f : x \longmapsto x + e^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.

   On sait que,

   1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un **intervalle**.
   2. La fonction f est **continue sur** $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions qui le sont)
   3. Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + e^x > 0$$

   Donc f est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

   D'après le **théorème de la bijection**, f réalise donc une

   $$\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R} \text{ sur l'intervalle } J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

2. Justifier que f^{-1} est dérivable et déterminer $(f^{-1})'(1)$.

   On sait que,

   1. f est **bijective** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf question 1)
   2. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$,
   3. f' **ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$ puisque

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + e^x \neq 0$$

   Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(y))}$$

   En particulier,

   $$f^{-1}(1) = \frac{1}{1 + \exp(f^{-1}(1))}$$

   Or, $f(0) = 1$, donc $f^{-1}(1) = 0$. On en déduit que

   $$\boxed{f^{-1}(1)} = \frac{1}{1 + \exp(0)} \boxed{= \tfrac{1}{2}}$$

Exercice 13 – Dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \longmapsto xe^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser l'équation de la tangente en 0.

   La fonction f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = (1+x)e^x$$
   On a donc
   $$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff (1+x)e^x \geq 0 \\ &\iff 1+x \geq 0 \text{ car } e^x > 0 \\ &\iff x \geq -1. \end{aligned}$$
   On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

   L'équation de la tangente en 0 est
   $$y = f(0) + (x-0)f'(0)$$
   soit après calculs,
   $$\boxed{y = x}$$

2. Démontrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble J à déterminer. On note φ sa bijection réciproque.

   On sait que,
   1. L'ensemble $]-1,+\infty[$ est un **intervalle**.
   2. f est **continue** sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont.
   3. f est **strictement croissante** sur $]-1,+\infty[$ d'après la question 1.

   D'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise donc une
   $$\boxed{\text{bijection de }]-1,+\infty[\text{ sur } J = f(]-1,+\infty[) =]-e^{-1},+\infty[.}$$

3. Déterminer $\varphi(e)$.

   On remarque que $f(1) = e$ donc $\boxed{\varphi(e) = 1.}$

4. Justifier que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(e)$.

   On sait que
   1. f est **bijective** de $]-1,+\infty[$ sur $]-e^{-1},+\infty[$,
   2. f est **dérivable** sur $]-1,+\infty[$,
   3. f' **ne s'annule pas** sur $]-1,+\infty[$ car
   $$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ f'(x) = (1+x)e^x \neq 0$$
   On en déduit que $\varphi = f^{-1}$ est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et
   $$\forall y \in]-e^{-1},+\infty[,\ \ \varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$
   En particulier,
   $$\boxed{\varphi'(e) = \frac{1}{f'(\varphi(e))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}}$$

Exercice 14 – Dérivabilité de la fonction réciproque. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x + \ln(x) + 2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

   On sait que,
   1. L'ensemble $]0,+\infty[$ est un **intervalle**.
   2. La fonction f est **continue** sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont.
   3. La fonction f est **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$ car la fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
   $$\forall x > 0, \qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

   D'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise donc une

   $$\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } J = f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.}$$

   On note f^{-1} la bijection réciproque, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
2. Dresser le tableau de variation de f^{-1} en précisant les valeurs remarquables et les limites.

   On dispose de plusieurs informations.
   - Comme f est strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.
   - On sait que
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   donc,
   $$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$
   - (On peut remarquer que $f(1) = 3$ donc $f^{-1}(3) = 1$.)

   D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	↗	$+\infty$

3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse 1.

   L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse 1 est la droite donnée par

   $$\boxed{y} = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 3 \boxed{= 2x+1}$$

4. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point N d'abscisse 3.

   On sait que
   1. f est **bijective** de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
   2. f est **dérivable** sur $]0,+\infty[$,
   3. f' **ne s'annule pas** sur $]0,+\infty[$ car
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \neq 0$$

   Donc, la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}(y)+1}}$$

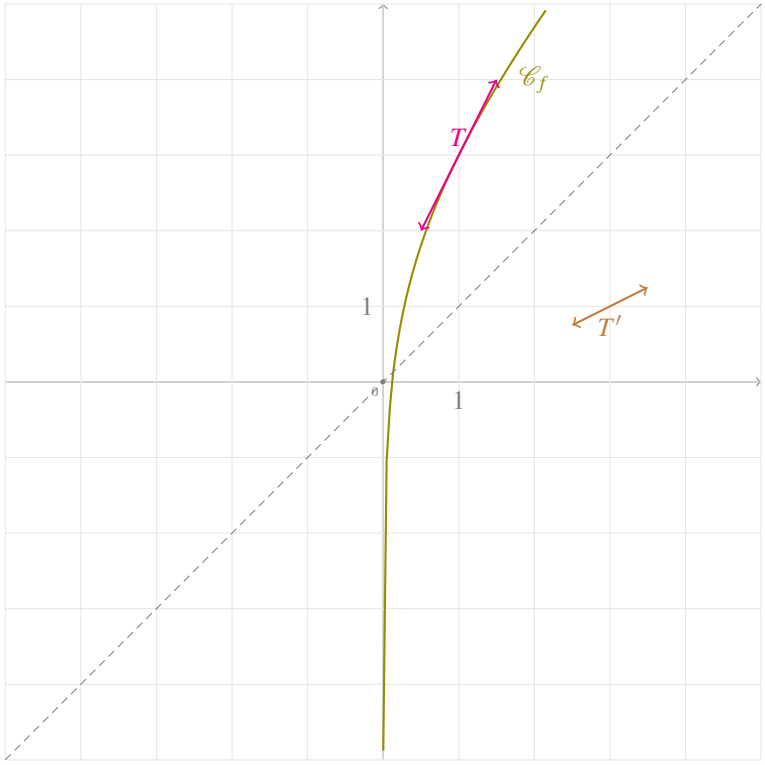
   En particulier,

   $$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{f^{-1}(3)}{f^{-1}(3)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(comme $f(1)=3$, on sait que $f^{-1}(3)=1$). Ainsi, l'équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point N d'abscisse 3 est donné par

$$\boxed{y} = (f^{-1})'(3)(x-3)+f^{-1}(3) = \frac{1}{2}(x-3)+1 \boxed{= \tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}}$$

5. Construire sur un même graphique $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$, T et T'.



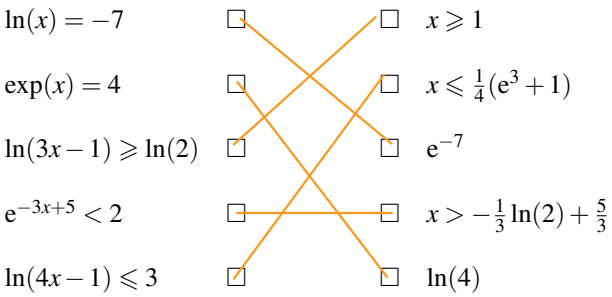
6. Montrer que

$$\forall x \in J,\ \ (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$$

Cf Question 4.

2 Fonction exponentielle et logarithme

Exercice 15 – (ln)équations avec ln et exp. Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.



- Soit $x > 0$. On a :
  $\ln(x) = -7 \iff x = e^{-7}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
  $\exp(x) = 4 \iff x = \ln 4$
- Soit $x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$. On a :
  $\ln(3x-1) \geqslant \ln(2) \iff 3x-1 \geqslant 2$
  $\iff 3x \geqslant 3$
  $\iff x \geqslant 1$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
  $e^{-3x+5} < 2 \iff -3x+5 < \ln 2$
  $\iff -3x < \ln 2 - 5$
  $\iff x > -\frac{1}{3}(\ln 2 - 5)$
  $\iff x > -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{5}{3}$
- Soit $x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$. On a :
  $\ln(4x-1) \leqslant 3 \iff 4x-1 \leqslant e^3$
  $\iff 4x \leqslant e^3 + 1$
  $\iff x \leqslant \frac{1}{4}(e^3+1)$

Exercice 16 – Calculs algébriques sur ln et exp. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

   a) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\ln(8)+5\ln(2)$

   c) $\ln(\sqrt{32})$ d) $\ln(10)-\ln(20)$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $e^5 \times e^2 \times e^{-3}$ b) $e^3 \times (e^{-4})^2$

   c) $\frac{e^4 \times e^{-5}}{e}$ d) $\frac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4}$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $e^{2\ln 3+\ln 4}$ b) $e^{3\ln 2-\ln 4}$

   c) $\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}$ d) $e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7}$

   e) $e^{5\ln 3} \times e^{4\ln 9}$ f) $\ln(1+e^5)+\ln\left(\frac{1}{1+e^{-5}}\right)$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

   a) $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$ b) $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

   c) $e^{2\ln(x)}$ d) $-\ln(2x)-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

   e) $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$ f) $\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions A et B et factoriser les expressions C (par e^{-4x}) et D (par e^x-3x).

$$\begin{aligned} A &= (e^{2x}+5)^2 \\ B &= (e^{2x}-2)(e^{-x}+5) \\ C &= 5e^{-4x}-3e^{-4x}+7e^{-4x} \\ D &= e^{2x}-9x^2 \end{aligned}$$

1.a) $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4)$
$= -\ln(2^2)$
$= -2\ln(2)$

1.b) $\ln(8)+5\ln(2) = \ln(2^3)+5\ln(2)$
$= 3\ln(2)+5\ln(2)$
$= 8\ln(2)$

1.c) $\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln(32)$
$= \frac{1}{2}\ln(2^5)$
$= \frac{5}{2}\ln(2)$

1.d) $\ln(10)-\ln(20) = \ln(10)-\ln(2\times 10)$
$= \ln(10)-(\ln 2+\ln 10)$
$= \ln(10)-\ln 2-\ln 10$
$= -\ln(2)$

2.a) $e^5\times e^2\times e^{-3} = e^{5+2-3}$
$= e^4$

b) $e^3\times(e^{-4})^2 = e^3\times e^{-4\times 2}$
$= e^3\times e^{-8}$
$= e^{3-8}$
$= e^{-5}$

c) $\frac{e^4\times e^{-5}}{e} = \frac{e^4\times e^{-5}}{e^1}$
$= e^{4-5-1}$
$= e^{-2}$

d) $\frac{e\times(e^5)^7}{e^{-9}\times e^4} = e^{1+5\times 7-(-9+4)}$
$= e^{41}$

3.a) $e^{2\ln(3)+\ln 4} = e^{2\ln(3)}\times e^{\ln(4)}$
$= e^{\ln(3^2)}\times e^{\ln(4)}$
$= 3^2\times 4$
$= 36$

b) $e^{3\ln 2-\ln 4} = e^{3\ln(2)}\times e^{-\ln 4}$
$= e^{\ln(2^3)}\times e^{\ln(\frac{1}{4})}$
$= 2^3\times\frac{1}{4}$
$= 2$

c) $\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}} = \frac{e^{\ln 6}\times e}{e^{\ln 9}\times e^2}$
$= \frac{6}{9}e^{-1}$
$= \frac{2}{3}e^{-1}$

d) $e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7} = e^{\ln(3^3)}+e^{\ln(7^2)}$
$= 3^3+7^2$
$= 27+49$
$= 76$

e) $e^{5\ln 3}\times e^{4\ln(9)} = 3^5\times 9^4$

f) $\ln(1+e^5)+\ln\left(\frac{1}{1+e^{-5}}\right) = \ln\left(e^5(1+e^{-5})\right)-\ln(1+e^{-5})$
$= \ln(e^5)+\ln(1+e^{-5})-\ln(1+e^{-5})$
$= 5$

4.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2}$$
$$= e^{x^2+2x-(x^2+2x+1)}$$
$$= e^{-1}$$

c) Soit $x > 0$. On a :

$$e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)}$$
$$= x^2$$

d) Soit $x > 0$. On a :

$$-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2x} \times \frac{1}{x} \times x^2\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\ln 2$$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} = \left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x}$$
$$= e^{2x \times \frac{1}{2}} \times e^{-x}$$
$$= e^{x} \times e^{-x}$$
$$= e^{x-x}$$
$$= e^{0}$$
$$= 1$$

f) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3} = e^{x^2-2x+2x-2x\times 3}$$
$$= e^{x^2-6x}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

A $= (e^{2x}+5)^2$
$= (e^{2x})^2 + 2e^{2x} \times 5 + 5^2$
$= e^{4x} + 10e^{2x} + 25$

B $= (e^{2x}-2)(e^{-x}+5)$
$= e^{2x} \times e^{-x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 2\times 5$
$= e^{x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 10$

C $= 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x}$
$= (5-3+7)e^{-4x}$
$= 9e^{-4x}$

D $= e^{2x} - 9x^2$
$= (e^x)^2 - (3x)^2$
$= (e^x - 3x)(e^x + 3x)$