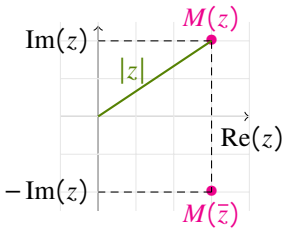
6. Nombres complexes : forme trigonométrique

Pour bien démarrer : Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- **Forme algébrique** : $z = a + ib$ avec a et b deux réels
- **Partie réelle** : $\mathrm{Re}(z) = a$
- **Partie imaginaire** : $\mathrm{Im}(z) = b$.
- **Conjugué** : $\bar{z} = a - ib$
- **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



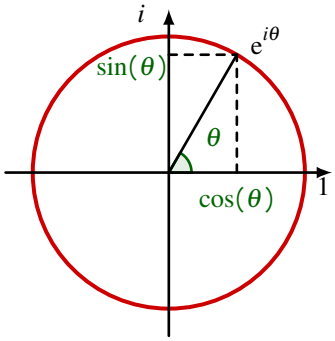
1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Nombres complexes de module 1

Définition 1.1 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Autrement dit, «$e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique associé à l'angle θ».



Exemple 1.2 Compléter le tableau suivant.

Forme algébrique	Forme trigonométrique
$1 = \cos 0 + i\sin 0$	e^{i0}
$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$	$e^{i\pi}$
$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exemple 1.3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Que vaut $\overline{e^{i\theta}}$? (On écrira le résultat sous forme trigonométrique).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a,

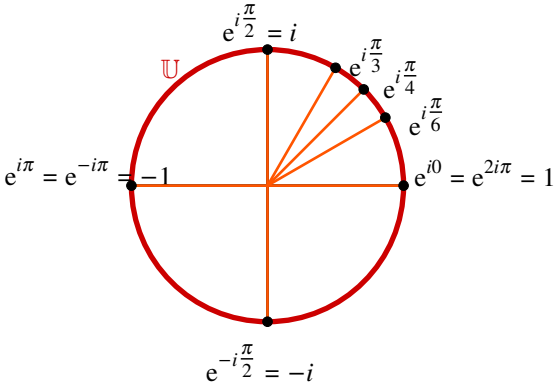
$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

Proposition 1.4 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$z \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1.$$

Autrement dit, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points situés sur le cercle trigonométrique. De plus,

$$z \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$$



Proposition 1.5 Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$$

Exemple 1.6 Compléter le tableau suivant.

Forme algébrique	-1	1	i	$-i$	$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$
Forme trigonométrique	$e^{i\pi}$	$e^{2i\pi}$	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Les propriétés algébriques de l'exponentielle complexe sont les mêmes que les propriétés de l'exponentielle «classique».

Proposition 1.7 Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

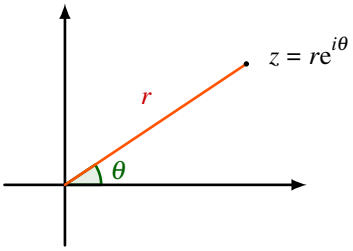
a) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ c) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 1.8 Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, ce nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante, appelée **forme trigonométrique**,

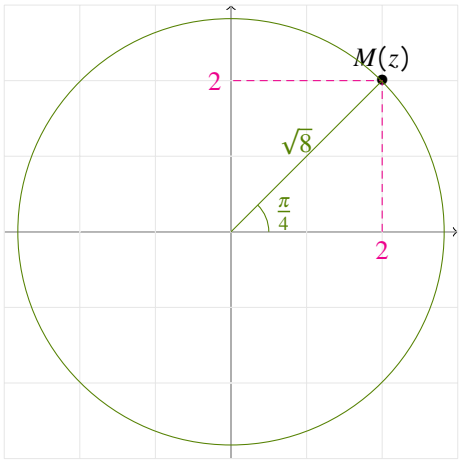
$$z = re^{i\theta} \qquad \text{avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

- Le nombre réel positif r est unique et vaut le module de z, autrement dit $r = |z|$.
- Le nombre réel θ n'est pas unique, est appelé un **argument** de z, et est noté $\arg z$.



Soient $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et M le point du plan d'affixe z. Le couple (r, θ) est un couple de **coordonnées polaires** de M.

Exemple 1.9 Donner la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe représenté ci-dessous.



On a,

$$z = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Proposition 1.10 — Unicité de la forme trigonométrique ?. Pour tout $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a,

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \,[2\pi] \end{cases}$$

Proposition 1.11 Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

a) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, b) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour passer de la forme trigonométrique d'un nombre complexe à sa forme algébrique, il suffit de se souvenir que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Exemple 1.12 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $2\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ b) $8e^{i\frac{\pi}{12}}$

a) On a,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}} &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= -\sqrt{6} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) On a,

$$\begin{aligned} 8e^{i\frac{\pi}{12}} &= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= 8\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 8i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Pour passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique, on peut commencer par calculer le module du nombre, factoriser par la quantité obtenue et reconnaître dans le facteur restant un point du cercle trigonométrique qu'il reste à écrire sous forme trigonométrique.

Exemple 1.13 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et en déduire leur argument.

a) $1 + i$ b) $-1 + i\sqrt{3}$

a) On peut commencer par calculer que

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

D'où

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

b) On peut commencer par calculer que

$$|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} -1 + i\sqrt{3} &= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

D'où

$$\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

Si le nombre complexe est donné sous la forme d'un produit ou d'un quotient ou d'une puissance, on peut trouver la forme trigonométrique sans récupérer la forme algébrique en identifiant dans l'écriture plusieurs nombres complexes que l'on peut mettre facilement sous forme trigonométrique.

Exemple 1.14 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = (1+i)(-1+i\sqrt{3})$ b) $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour trouver la forme trigonométrique de z_1 et de z_2, on pourrait commencer par déterminer leur forme algébrique (en développant le produit pour z_1 et en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée pour z_2), puis utiliser la méthode de l'exemple précédent (on factorise par le module puis on reconnaît un point du cercle trigonométrique). Ici, il est plus rapide de reconnaître en chacun des facteurs un nombre que l'on peut écrire sous forme trigonométrique puis utiliser les règles de calculs sur l'exponentielle.

En utilisant les résultats de l'Exemple 1.13,

a) on a,

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)(-1+i\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} \end{aligned}$$

b) et de même,

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} \\ &= \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

Utiliser la forme trigonométrique permet dans certains cas de simplifier les calculs, comme par exemple, lorsque le calcul contient une puissance élevée.

Exemple 1.15 Donner la forme algébrique de $z = (-1+i\sqrt{3})^7$.

Gestes Invisibles/Automatismes. La forme algébrique «se marie mal» avec les puissances (car on doit alors calculer la puissance d'une somme...) tandis que la forme trigonométrique «se marie très bien» avec les puissances, car cela revient à calculer la puissance d'une exponentielle ce que l'on sait faire. Ainsi, pour calculer la puissance d'un nombre complexe, on passera en priorité par la forme trigonométrique, quitte à revenir à la fin à la forme algébrique.

On a,

$$\begin{aligned} z &= (-1+i\sqrt{3})^7 \\ &= \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7 && \text{(on passe à la forme trigo sous la puissance)} \\ &= 2^7 e^{i7\times\frac{2\pi}{3}} && \text{(on calcule alors «facilement» la puissance)} \\ &= 128e^{i\frac{14\pi}{3}} \\ &= 128e^{i\frac{2\pi}{3}} && \text{(on réduit l'angle au besoin)} \\ &= 128\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) && \text{(on revient à la forme algébrique)} \\ &= 128\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -64+64i\sqrt{3} \end{aligned}$$

1.3 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 1.16 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec a et b réels). On appelle **exponentielle** (complexe) de z le nombre (complexe) suivant

$$e^z = \underbrace{e^a}_{\text{exp réelle}} \times \underbrace{e^{ib}}_{\text{un point du cercle trigo}} = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}$$

En particulier,

$$|e^z| = e^a \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) = b + 2k\pi \ \ (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Certaines propriétés valables pour l'exponentielle réelle ne le sont plus pour l'exponentielle complexe. Par exemple, on ne peut plus dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z > 0$. D'une part, parler de signe d'un nombre complexe n'a pas de sens, d'autre part,

$$e^{i\pi} = -1$$

Proposition 1.17 Soient z et z' deux nombres complexes.

a) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ b) $e^z = e^{z'} \iff z = z' + 2ik\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

Exemple 1.18 Résoudre l'équation $e^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour résoudre une équation avec une exponentielle complexe, on commence par mettre tous les nombres complexes impliqués sous forme trigo puis on identifie module et argument.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
e^z = -2 &\iff e^x e^{iy} = 2e^{i\pi} \\
&\iff \begin{cases} e^x = 2 & \text{(identification module)} \\ y = \pi + 2k\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z} & \text{(identification argument)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \ln(2) \\ y = \pi + 2k\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff z = \ln(2) + i(\pi + 2k\pi)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $e^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet une infinité de solutions, données par

$$z = \ln(2) + i(\pi + 2k\pi) \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2 Racines n-ièmes

2.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Proposition 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité (les complexes tels que $z^n = 1$) sont exactement les n nombres complexes

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

En particulier, il y a $\underline{n}$ racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire n solutions complexes à l'équation $z^n = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \qquad \text{avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

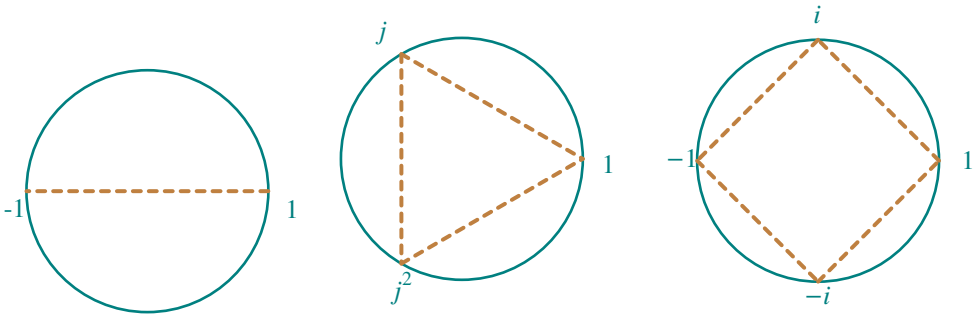
Démonstration. Remarquons que 0 ne vérifie pas $z^n = 1$. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff (re^{i\theta})^n = 1 \\ &\iff r^n e^{in\theta} = 1 \times e^{i0} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff z = 1 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.3 Donner les racines n-ièmes de l'unité sous forme trigonométrique et algébrique pour $n = 2, 3$ et 4 et les représenter sur le cercle trignométrique.

n	Équation	Racines n-ièmes (forme trigo.)	Racines n-ièmes (forme alg.)
$n = 2$	$z^2 = 1$	$e^{\frac{2i\times 0\pi}{2}} = e^{i0}$ et $e^{\frac{2i\times 1\pi}{2}} = e^{i\pi}$	1 et -1
$n = 3$	$z^3 = 1$	$e^{\frac{2i\times 0\pi}{3}} = e^{i0}$, $e^{\frac{2i\times 1\pi}{3}} = e^{i\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\times 2\pi}{3}} = e^{i\frac{4i\pi}{3}}$	1, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$n = 4$	$z^4 = 1$	$e^{\frac{2i\times 0\pi}{4}} = e^{i0}$, $e^{\frac{2i\times 1\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{\frac{2i\times 2\pi}{4}} = e^{i\pi}$ et $e^{\frac{2i\times 3\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$	1, i, -1 et $-i$



$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$

Grâce à l'Exemple précédent, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est aussi l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés, de centre 0 et passant par le point d'affixe 1.

Proposition 2.4 Soit $n \geq 2$. La sommes des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Démonstration. Soit $n \geq 2$. En reconnaissant une **somme géométrique**, on obtient,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k &= \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \qquad \text{car } \omega \neq 1 \\ &= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\omega} \\ &= \frac{1-1}{1-\omega} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exemple 2.5 Dans cet exercice, on s'intéresse aux racines 3-ièmes de l'unité.

1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que
$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$$
Par définition, on sait que
$$\mathbb{U}_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2\} = \{1, j, j^2\}$$

2. Simplifier les quantités suivantes *en faisant le moins de calculs possible*.
Comme la somme des racines 3-ième de l'unité vaut 0, pour simplifier les relations, on va utiliser le fait que
$$1 + j + j^2 = 0$$
On peut aussi remarquer que
$$\overline{j} = \overline{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$$

a) $j(j+1) = j^2 + j = -1$

b) $\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$

c) On a,
$$\begin{aligned}\frac{j+1}{j-1} &= \frac{(j+1)(\overline{j-1})}{(j-1)(\overline{j-1})} \\ &= \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} \\ &= \frac{j^3 - j + j^2 - 1}{j^3 - j - j^2 + 1} \\ &= \frac{1 - j + (-1 - j) - 1}{1 - j - (-j - 1) + 1} \\ &= \frac{-1 - 2j}{3}\end{aligned}$$

2.2 Racines n-ièmes d'un nombre

Définition 2.6 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de** a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Il n'est pas conseillé d'apprendre le résultat de la proposition suivante mais il est indispensable de savoir le retrouver.

Proposition 2.7 Soit $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $z^n = \rho e^{i\varphi}$ admet n solutions complexes, qui sont les nombres complexes
$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Exemple 2.8 Déterminer les racines 2-ièmes (c'est-à-dire les racines carrées) du nombre i.

On cherche donc à résoudre l'équation

$$z^2 = i \qquad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}$$

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} z^2 = i &\iff r^2 e^{2i\theta} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Les racines 2-ièmes de i sont donc

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 2.9 Déterminer les racines 3-ièmes du nombre $2 + 2i$.

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 = 2 + 2i \qquad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}$$

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \in > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On a donc

$$\begin{aligned} z^3 = 2 + 2i &\iff r^3 e^{3i\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Les racines cubiques de $2 + 2i$ sont donc $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

3 Formule de trigonométrie

3.1 Linéariser : les formules d'Euler

Linéariser, c'est transformer une expression du type $\cos(x)^a \sin(x)^b$ (avec $x \in \mathbb{R}$) en une expression sans puissances, uniquement avec $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, etc. Pour cela, on utilise les formules d'Euler.

Proposition 3.1 — Formules d'Euler. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Ces formules proviennent des formules suivantes

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

en remarquant que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

■

Exemple 3.2 En utilisant les formules d'Euler, redémontrer la formule de linéarisation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 && \textit{[Formules d'Euler vers les exponentielles]}\\
&= \frac{(e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2}{4} && \textit{[Binôme de Newton]}\\
&= \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4} && \textit{[Simplifications]}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4} && \textit{[Regroupement des termes conjugués]}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} && \textit{[Forcer l'apparition des formules d'Euler]}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) && \textit{[Formules d'Euler vers les } \cos \textit{ et } \sin\textit{]}
\end{aligned}$$

Exemple 3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^5(x)$.

On a,

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix}-e^{-ix})^5 && \textit{[Formules d'Euler vers les exponentielles]}\\
&= \frac{1}{32i}\Big((e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4(-e^{-ix}) + 10(e^{ix})^3(-e^{-ix})^2 && \textit{[Binôme de Newton]}\\
&\qquad +10(e^{ix})^2(-e^{-ix})^3 + 5e^{ix}(-e^{-ix})^4 + (-e^{-ix})^5\Big)\\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) && \textit{[Simplifications]}\\
&= \frac{1}{32i}\left((e^{5ix}-e^{-5ix}) - 5(e^{3ix}-e^{-3ix}) + 10(e^{ix}-e^{-ix})\right) && \textit{[Regroupement des termes conjugués]}\\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 5\times\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 10\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) && \textit{[Forcer l'apparition des formules d'Euler]}\\
&= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right). && \textit{[Formules d'Euler vers les } \cos \textit{ et } \sin\textit{]}
\end{aligned}$$

3.2 Délinéariser : les formules de Moivre

On fait ici l'opération inverse de la linéarisation (que l'on appelle parfois délinéarisation) : on veut exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et de leurs puissances. Pour cela, on utilise la formule de Moivre.

Proposition 3.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Autrement dit,

a) $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$ b) $\sin(nx) = \mathrm{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \mathrm{e}^{inx} = (\mathrm{e}^{ix})^n = (\cos(x) + i\sin(x))^n.$$

■

Exemple 3.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$ et de leurs puissances.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
&(\cos(x) + i\sin(x))^4 \\
&\quad = \cos(x)^4 + 4\cos(x)^3(i\sin(x)) + 6\cos(x)^2(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4 \\
&\quad = \cos(x)^4 + 4i\cos(x)^3\sin(x) - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 - 4i\cos(x)\sin(x)^3 + \sin(x)^4 \\
&\quad = \underbrace{\cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4}_{\text{Partie réelle}} + i\underbrace{(4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3)}_{\text{Partie imaginaire}}.
\end{aligned}$$

On en déduit les expressions suivantes

$$\cos(4x) = \underbrace{\cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4}_{\text{Partie réelle}}$$

$$\sin(4x) = \underbrace{4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3}_{\text{Partie imaginaire}}.$$

3.3 Technique de l'angle moitié

La technique de «l'angle moitié» permet de factoriser des expressions de la forme $\mathrm{e}^{ia} \pm \mathrm{e}^{ib}$. L'idée est la suivante :

$$\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{ia} - \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$$

Exemple 3.6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. «Factoriser» la quantité $\mathrm{e}^{i\theta} + 1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\theta} + 1 &= \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i0} \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

en utilisant la formule d'Euler.

Les formules suivantes, déjà vues dans le chapitre sur la trigonométrie peuvent se retrouver à partir de la technique de l'angle moitié.

Proposition 3.7 — Formules de factorisation. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

a) $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ b) $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

c) $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ d) $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a,

- $\cos(a)+\cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib})$ *[Passage aux exponentielles complexes]*
  $= \mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib})$ *[Propriété de la partie réelle]*
  $= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)$ *[Technique de l'ange moitié]*
  $= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\times 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$ *[Formules d'Euler]*
  $= \mathrm{Re}\left(\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\times 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$ *[Passage de $e^{i\theta}$ sous forme algébrique]*
  $= \mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$ *[Écriture sous forme algébrique]*
  $= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$

■

3.4 Calcul de sommes de cosinus et sinus

La technique pour calculer une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$$

est de passer par l'exponentielle complexe pour se ramener à une somme géométrique.

Exemple 3.8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On peut commencer par remarquer que

$$S = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}\right)$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} &= \sum_{k=0}^{n} (e^{it})^k = \frac{(e^{it})^{n+1}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}-1} \quad \text{car } e^{it} \neq 1 && \textit{[Calcul d'une somme géométrique]} \\
&= \frac{e^{i\frac{t(n+1)}{2}}\left(e^{i\frac{t(n+1)}{2}} - e^{-i\frac{t(n+1)}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)} && \textit{[Technique de l'angle moitié]} \\
&= \frac{e^{i\frac{tn}{2}} \times 2i\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{2i\sin(\frac{t}{2})} && \textit{[Formules d'Euler]} \\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} e^{i\frac{tn}{2}} && \textit{[Simplifications]} \\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\left(\cos\left(\frac{tn}{2}\right) + i\sin\left(\frac{tn}{2}\right)\right) && \textit{[Mise sous forme algébrique]} \\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos\left(\frac{tn}{2}\right) + i\,\frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(\frac{tn}{2}\right). && \textit{[Écriture sous forme algébrique]}
\end{aligned}
$$

Ainsi, en prenant la partie réelle, on en déduit que,

$$
\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos\left(\frac{tn}{2}\right).
$$

3.5 Transformer acos(t)+b sin(t) en un seul cosinus

Proposition 3.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a,

$$
\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t-\theta) \qquad \text{où } r \text{ et } \theta \text{ vérifient } a + ib = re^{i\theta}
$$

Une fonction $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ est appelée signal sinusoidal. En physique, r se note souvent A, représentant l'amplitude du signal et θ se note φ, représentant sa phase.

Exemple 3.10 Écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x) + \sqrt{12}\sin(x)$, sous la forme d'un seul cosinus.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$
\begin{aligned}
2\cos(x) + \sqrt{12}\sin(x) &= \sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2}}\cos(x) + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2}}\sin(x)\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{12}}{4}\sin(x)\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) \qquad \text{car } \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\
&= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)
\end{aligned}
$$

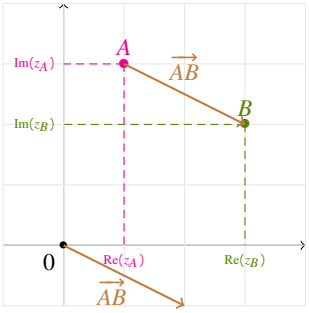
4 Lien avec la géométrie

Pour faire de la géométrie grâce aux nombres complexes, on utilise l'identification suivante : tout point M du plan s'identifie à un unique nombre complexe, et inversement, via le procédé suivant :

$$(x,y) \text{ (dans le plan)} \quad \longleftrightarrow \quad x+iy \text{ (dans } \mathbb{C})$$

	Visio géométrique	Vision «nbres complexes»
Un élément	$M(x,y)$	$z = x+iy$
Un point de l'axe des abscisses	$M(x,0)$	$z = x$
Un point de l'axe des ordonnées	$M(0,y)$	$z = iy$
Un point du cercle unité	$OM = 1$	$\lvert z\rvert = 1$

? Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.



Exemple 4.1 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5,3)$ et $B(-1,2)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ grâce à la géométrie, puis grâce aux nombres complexes.

Grâce à la géométrie, on sait que

$$\overrightarrow{AB} = (-1-5, 2-3) = (-6,-1)$$

Sinon, grâce aux nombres complexes, on sait que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut

$$(-1+2i) - (5+3i) = -6-i$$

et donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-6,-1)$.

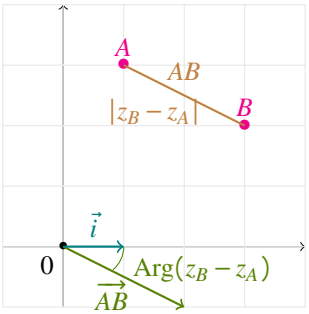
4.1 Angle, alignement et orthogonalité

Dans cette partie, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'argument de z appartenant à $[0, 2\pi[$ (tandis que $\arg(z)$ désigne seulement un argument de z).

Proposition 4.2 — Distance et angle. Soient les points A, B et C d'affixes z_A, z_B et z_C, avec $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$. Alors,

a) la **distance** entre les points A et B vaut
$$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$$

b) l'**angle** entre l'axe des abscisses et $\overrightarrow{AB}$ vaut
$$(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \mathrm{Arg}(z_B - z_A)$$



Exemple 4.3 Soient A et B deux points d'affixe respectives $z_A = 6+3i$ et $z_B = 3-4i$. Déterminer la distance AB.

On a,

$$AB = |z_B - z_A| = |3-4i-(6+3i)| = |-3-7i| = \sqrt{(-3)^2+(-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Proposition 4.4 — Distance et angle. Soient les points A, B et C d'affixes z_A, z_B et z_C, avec $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$. Alors,

a) $\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{BC}{AC}$ b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

Exemple 4.5 Soient A et B deux points du plan dont les affixes respectives sont -3 et $2i$. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition

$$\left|\frac{z+3}{z-2i}\right| = 1$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+3}{z-2i}\right| = 1 &\iff \frac{|z-(-3)|}{|z-2i|} = 1\\ &\iff \frac{MA}{MB} = 1\\ &\iff MA = MB\\ &\iff M \text{ est donc sur la médiatrice du segment } [AB].\end{aligned}$$

Exemple 4.6 Dans le plan complexe, considérons les points $A(-2i)$, $B(-1+3i)$ et $C(2+i)$. Déterminons l'angle $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

On a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) &= \text{Arg}\left(\frac{2+i-(-1+3i)}{2+i-(-2i)}\right)\\ &= \text{Arg}\left(\frac{3-2i}{2+3i}\right)\\ &= \text{Arg}\left(\frac{(3-2i)(2-3i)}{13}\right)\\ &= \text{Arg}\,(-i)\\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Proposition 4.7 Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.8 Soient A, B et C trois points du plan d'affixes z_A, z_B et z_C avec A, B et C distincts. Alors

- Les points A, B et C sont alignés
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$
$\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

- Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales
$\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z_C - z_A = \lambda i(z_B - z_A)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\,\lambda$
$\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Exemple 4.9 Dans le plan complexe, on considère les points $A(-3)$ et $B(2i)$.

1. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition $\dfrac{z+3}{z-2i} \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{z-2i} \in \mathbb{R} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z-(-3) = \lambda(z-2i)\\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}\\ &\iff \text{les points } A, B \text{ et } M \text{ sont donc alignés}\\ &\iff \text{le point } M \text{ est donc sur la droite } (AB)\end{aligned}$$

2. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition $\dfrac{z+3}{z-2i} \in i\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{z-2i} \in i\mathbb{R} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z-(-3) = \lambda i(z-2i)\\ &\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.\\ &\iff \text{les droites (AM) et (BM) sont orthogonales.}\\ &\iff M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB].\end{aligned}$$

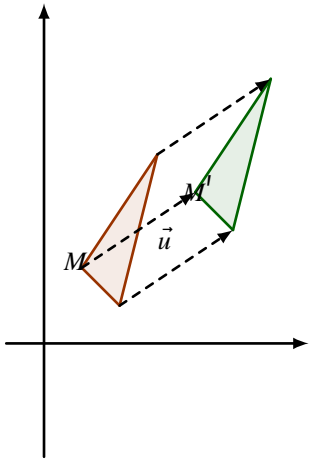
4.2 Transformations du plan : translations, homothéties et rotations

Définition 4.10
- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **homothétie de centre** 0 **et de rapport** λ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\,\overrightarrow{OM}$$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation de centre** 0 **et d'angle** θ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$OM = OM' \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

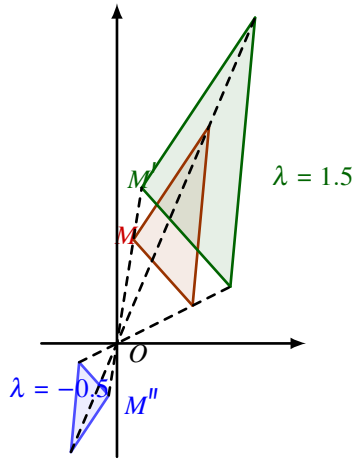
Remarque 4.11 Les translations et les rotations conservent les distances. Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$.

Proposition 4.12

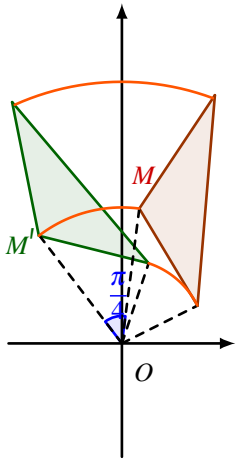
Application	Transformation associée
$z \longmapsto \overline{z}$	Symétrie par rapport à l'axe des abscisses
$z \longmapsto z + b$	Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
$z \longmapsto e^{i\theta} z \ (\theta \in \mathbb{R})$	Rotation de centre O et d'angle θ
$z \longmapsto kz \ (k \in \mathbb{R}^*)$	Homothétie de centre O et de rapport k.
$z \longmapsto az \ (a = re^{i\theta} \in \mathbb{C})$	Composée de l'homothétie de rap. r avec la rotation de centre O et d'angle θ.



TRANSLATION DE VECTEUR $\vec{u}$



HOMOTHÉTIE DE CENTRE 0 ET DE RAPPORT λ



ROTATION DE CENTRE 0 ET D'ANGLE θ

Exemple 4.13 Compléter le tableau suivant donnant la correspondance entre une application et la transformation géométrique associée.

Application	Transformation associée
$z \mapsto z+i-4$	Translation de vecteur d'affixe $i-4$.
$z \mapsto iz$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
$z \mapsto -iz$	Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$
$z \mapsto -\frac{1}{2}z$	Homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$