7. Systèmes Linéaires

Définition 0.1 — Système Linéaire. On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues un système (S) de la forme

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où

- et les réels $x_1,\dots,x_p$ sont les p *inconnues* du système,
- les réels $a_{1,1}, a_{1,2},\dots,a_{n,n}$ sont les *coefficients* du système,
- et le vecteur de réels $(b_1,\dots,b_n)$ forme le *second membre* du système.

Une *solution* du système est un p-uplet $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie le système (S) ci-dessus.

Exemple 0.2 Montrer que le *triplet* $(-1,0,2)$ est une solution du système suivant,

$$(S)\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

On est face à un **système linéaire** de trois équations à trois inconnues x, y, z (une solution de ce système est donc représentée par un triplet).

On calcule directement que

$$\begin{cases} -1 & + & 0 & + & 2\times 2 & = & 3 \\ -1 & + & 2\times 0 & + & 2 & = & 1 \\ 2\times(-1) & + & 0 & + & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Donc le *triplet* $(-1,0,2)$ est une solution du système linéaire (S).

? Une équation du type

$$a_1x + a_2y = b \quad \text{ou de manière équivalente (si } a_2 \neq 0) \quad y = -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}$$

est l'équation d'une *droite dans le plan*. Ainsi, résoudre un système de deux équations à deux inconnues du type

$$\begin{cases} a_1x & + & a_2y & = & b_1 \\ a_3x & + & a_4y & = & b_2 \end{cases}$$

revient à chercher l'*intersection de deux droites* dans le plan.

Exemple 0.3 Résoudre *graphiquement* le système suivant,

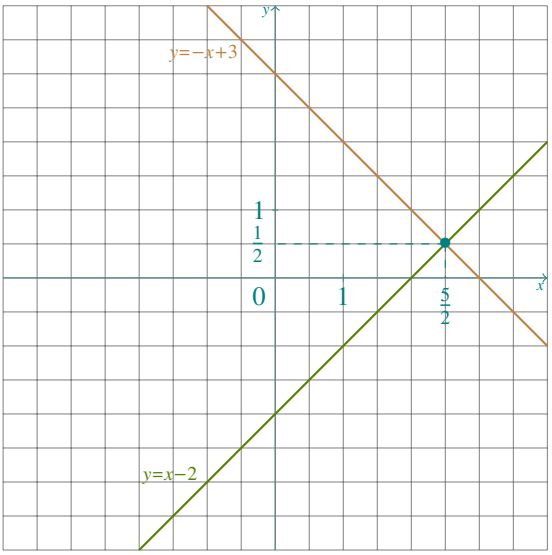
$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

On est face à un système **linéaire** de deux équations à deux inconnues (une solution de ce système se présente donc sous la forme d'un couple).

On peut commencer par remarquer que

$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y & = & -x & + & 3 \\ y & = & x & - & 2 \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = -x+3$ et $y = x-2$.



Donc ce système linéaire admet une *unique* solution, donnée par le couple $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

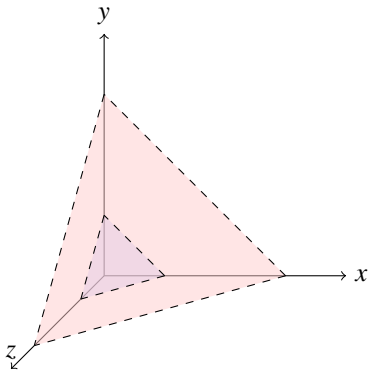
Vérification. Le couple $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 & \checkmark \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 & \checkmark \end{cases}$$

? Une équation du type

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$$

est l'équation d'un *plan dans l'espace*. Ainsi, résoudre un système de deux équations à trois inconnues revient à déterminer l'intersection de deux plans dans l'espace, ou encore résoudre un système de trois équations à trois inconnues revient à déterminer l'intersection de trois plans dans l'espace.



Le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

n'admet *aucune* solution car les deux lignes du système sont incompatibles. Géométriquement, cela correspond au fait que les deux plans sont parallèles et non confondus.

1 Résolution d'un système linéaire

1.1 Résolution pour des systèmes échelonnés

De manière informelle, un système linéaire est **échelonné** si à chaque ligne, au moins une inconnue disparait de toutes les lignes suivantes. Ces systèmes sont simples à résoudre en «remontant les équations du *bas vers le haut*». Un système linéaire échelonné peut admettre

- soit *aucune* solution (cf Exemple 1.2)
- soit une *unique* solution (cf Exemple 1.1)
- soit une *infinité* de solutions (cf Exemple 1.3).

Exemple 1.1 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

On est face à un système linéaire **échelonné**, de trois équations avec trois inconnues (une solution de ce système est donc représentée par un triplet).

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 1 = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2 - 2\times 1 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc, ce système linéaire admet une *unique* solution donnée par le triplet $(1,2,1)$.

Vérification. Le triplet $(1,2,1)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 1 + 2 - 2\times 1 = 1 & \checkmark \\ 2\times 2 + 1 = 5 & \checkmark \\ 1 = 1 & \checkmark \end{cases}$$

Exemple 1.2 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

On est face à un système linéaire **échelonné**, de trois équations avec trois inconnues (une solution de ce système est donc représentée par un triplet).

La dernière équation est impossible. Donc, ce système linéaire n'admet *aucune* solution.

Exemple 1.3 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

On est face à un système linéaire **échelonné**, de trois équations avec trois inconnues (une solution de ce système est donc représentée par un triplet).

Le système linéaire contient strictement plus d'inconnues que d'équations. On choisit deux (car il y a deux équations) *inconnues principales*, par exemple x et y, que l'on exprime en fonctions des inconnues restantes, ici seulement z, que l'on appelle *inconnues secondaires*. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = -1 + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (-1+z) + z = 1 \\ y = -1 + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 2z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Donc, ce système linéaire admet une *infinité* de solutions, qui sont données par

$$(2-2z,-1+z,z) \qquad \text{pour tout } z\in\mathbb{R}$$

Par exemple, les triplets $(2,-1,0)$ et $(0,0,1)$ sont des solutions de ce système linéaire mais le triplet $(2,0,0)$ n'en est pas une solution.

Vérification. Le triplet $(2,-1,0)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 2 + (-1) + 0\times 1 = 1 & \checkmark \\ -1 + 0 = -1 & \checkmark \end{cases}$$

1.2 Résolution pour des systèmes non échelonnés

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système (cf. ci-dessous) pour se ramener à un système échelonné que l'on sait résoudre.

Proposition 1.4 On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système linéaire l'une des opérations suivantes :

- *intervertir* les lignes i et j, opération que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$,
- *ajouter* à la ligne i, λ fois la ligne j ($j\neq i$), notée $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$,
- *multiplier* la ligne i par $\lambda\neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ne modifie pas l'ensemble des solutions.

Un système linéaire quelconque peut admettre

- soit *aucune* solution (cf Exemples 1.6 et 1.7)
- soit une *unique* solution (cf Exemple 1.5)
- soit une *infinité* de solutions (cf Exemple 1.8).

Exemple 1.5 On souhaite résoudre le système suivant

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 3z - 2y = 1 \\ -2 + 2y - z = x \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases}$$

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On va raisonner par équivalence.

1. On commence par "*ranger*" le système : on met les inconnues à gauche, en alignant en colonne les mêmes inconnues, et on met le second membre (tous les termes sans inconnues) à droite.

$$(S) \iff \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases}$$

2. On choisit un *pivot* dans la première colonne (associée à la première inconnue, ici x), c'est-à-dire un terme en x, dont le coefficient est non nul, et qui va nous permettre d'éliminer tous les autres termes en x. Pour se simplifier la tâche, on pourra privilégier les termes $+x$ ou $-x$ lorsque c'est possible, et échanger les lignes pour que celle contenant le pivot soit la première.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Maintenant, on utilise ce pivot pour éliminer les autres termes en x, en faisant les opérations adéquates sur les lignes. Par exemple, pour éliminer le terme en x dans la deuxième ligne, on peut additionner la ligne 2 à deux fois la ligne 1.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2y + z = 5 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2+2L_1$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2y + z = 5 \\ -4y - z = 3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3+3L_1$$

À partir de maintenant, on ne touche plus à la première ligne (celle contenant le pivot qui vient de servir).

3. On recommence en ne prenant plus en compte la première ligne. On choisit un pivot dans la deuxième colonne (associée à la deuxième inconnue), et on s'en sert pour éliminer les autres termes en y sauf sur la première ligne à laquelle on ne touche plus.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \boxed{2y} & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 13 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

4. On se retrouve avec un système échelonné, que l'on résout par substitution en remontant de bas en haut.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & y & = & -4 \\ & & & & z & = & 13 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -23 \\ y & = & -4 \\ z & = & 13 \end{array}\right. \end{aligned}$$

5. Conclusion : Ce système linéaire admet donc une *unique* solution donnée par le triplet $(-23,-4,13)$.

Vérification. Le triplet $(-23,-4,13)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2\times(-23) & - & 2\times(-4) & + & 3\times 13 & = & 1 & \checkmark \\ -(-23) & + & 2\times(-4) & - & 13 & = & 2 & \checkmark \\ 3\times(-23) & - & 10\times(-4) & + & 2\times 13 & = & -3 & \checkmark \end{array}\right.$$

Exemple 1.6 Résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

On est face à un système linéaire, de trois équations à trois inconnues (une solution se présente donc sous la forme d'un triplet).

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence* et résolvons ce système linéaire grâce à la *méthode du pivot de Gauss*.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{x} & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 6y & - & 12z & = & -7 \\ & - & 3y & - & 6z & = & -4 \end{array}\right. && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & \boxed{-} & 6y & - & 12z & = & -7 \\ & - & 3y & - & 6z & = & -4 \end{array}\right. && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 6y & - & 12z & = & -7 \\ & & & & 0 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. && L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{1}{2}L_2 \end{aligned}$$

Conclusion : La dernière ligne est impossible. Ce système linéaire n'admet *pas* de solution.

Exemple 1.7 Résoudre le système suivant grâce à l'algorithme de Gauss,

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & + & 2y & = & 7 \end{array}\right.$$

🔑 On est face à un système linéaire de trois équations à deux inconnues (une solution se présente donc sous la forme d'un couple).

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons par *équivalence* et résolvons ce système linéaire grâce à la *méthode du pivot de Gauss.* On a,

$$
\begin{aligned}
(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & = & 5 & & \\ 2x & + & 3y & = & 2 & & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 3x & + & 2y & = & 7 & & \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & = & 5 & & \\ & & 7y & = & -8 & & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & 8y & = & -8 & & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & = & 5 & & \\ & & y & = & -\frac{8}{7} & & \\ & & y & = & -1 & & \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles. Donc, ce système linéaire n'admet *aucune* solution.

Exemple 1.8 Résoudre le système suivant grâce à l'algorithme de Gauss,

$$
(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 7a & + & 8b & + & 9c & = & -1 \\ 4a & + & 5b & + & 6c & = & 0 \end{array} \right.
$$

🔑 On est face à un système linéaire, de trois équations à trois inconnues (une solution se présente donc sous la forme d'un triplet).

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence* et résolvons ce système linéaire grâce à la *méthode du pivot de Gauss.*

$$
\begin{aligned}
(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \boxed{a} & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 7a & + & 8b & + & 9c & = & -1 \\ 4a & + & 5b & + & 6c & = & 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & \boxed{-\,6b} & - & 12c & = & -8 \\ & & -\,3b & - & 6c & = & -4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & -\,6b & - & 12c & = & -8 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{1}{2}L_2
\end{aligned}
$$

🔑 Ici, la dernière ligne ne contient aucune information, on peut l'oublier.

$$
(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & -\,6b & - & 12c & = & -8 \end{array} \right.
$$

🔑 Nbre d'équations < Nbre d'Inconnues. On choisit alors deux inconnues principales (autant que d'équations), par exemple a et b, que l'on va exprimer en fonction des inconnues secondaires, ici c.

$$
\begin{aligned}
(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & b & & & = & -2c + \frac{4}{3} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c - \frac{5}{3} \\ b & = & -2c + \frac{4}{3} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Conclusion : Ce système admet une *infinité* de solutions, données par

$$
\left(c - \frac{5}{3}, -2c + \frac{4}{3}, c \right) \qquad \text{avec } c \text{ un réel quelconque}
$$

Par exemple, le triplet $(-5/3, 4/3, 0)$ (avec $c = 0$) est une solution du système linéaire ou encore le triplet $(-2/3, 2/3, 1)$ (avec $c = 1$).

Vérification. Le triplet $(-5/3, 4/3, 0)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} + 2\times\frac{4}{3} + 3\times 0 = 1 & \checkmark \\ 7\times\frac{5}{3} + 8\times\frac{4}{3} + 9\times 0 = -1 & \checkmark \\ 4\times\frac{5}{3} + 5\times\frac{4}{3} + 6\times 0 = 0 & \checkmark \end{cases}$$

1.3 Résolution d'un système linéaire avec un paramètre

Exemple 1.9 Soit m un paramètre réel. Résoudre le système suivant,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons par *équivalence* et résolvons ce système linéaire grâce à la *méthode du pivot de Gauss.*

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = -3 \\ (4-m^2)y = 6+3m \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

- Premier cas : si $4 - m^2 = 0$, c'est-à-dire si $m = 2$ ou $m = -2$ alors,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = -3 \\ 0 = 6+3m \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

  - ▶ Premier sous-cas : si $m = 2$ alors,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = -3 \\ 0 = 12 \end{cases}$$

    La dernière ligne est incompatible. Dans ce cas, le système linéaire n'admet donc aucune solution.
  - ▶ Deuxième sous-cas : si $m = -2$ alors,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

    Ici, la dernière ligne ne contient aucune information, on peut l'oublier. On obtient alors,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = -3$$

    Nbre d'équations < Nbre d'Inconnues. On choisit alors une inconnue principale (autant que d'équations, par exemple x, que l'on va exprimer en fonction de l'inconnue restante, ici y. On obtient alors,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 - 2y$$

    Dans ce cas, le système linéaire admet une infinité de solutions, données par

$$(-3-2y, y) \qquad \text{avec } y \text{ un réel quelconque}$$

    Vérification. Par exemple, les couples $(-3, 0)$ et $(-5, 1)$ sont des solutions (entre autres). Pour le couple $(-3, 0)$, c'est bien le cas car,

$$\begin{cases} -3 - 2\times 0 = -3 & \checkmark \\ -2\times(-3) + 4\times 0 = 6 & \checkmark \end{cases}$$

- Deuxième cas : si $4-m^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq -2$ alors,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ & & y & = & \frac{6+3m}{4-m^2} = \frac{3}{2-m} \end{array}\right.$$

🔑 Le système est maintenant sous forme échelonnée. On le résout de bas en haut.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{6}{m-2} \\ y & = & \frac{3}{2-m} \end{array}\right.$$

Dans ce cas, le système linéaire admet donc une unique solution donnée par

$$\left(\frac{6}{m-2}, \frac{3}{2-m}\right)$$

🧩 **Vérification.** Par exemple, pour $m = 8$, on obtient que le couple $(1, -1/2)$ est (l'unique) solution du système. C'est bien le cas car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 1 & + & 8\times\left(-\frac{1}{2}\right) & = & -3 & \checkmark \\ 8\times 1 & + & 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) & = & 6 & \checkmark \end{array}\right.$$