8. Nouvelles fonctions usuelles

Pour bien démarrer : des rappels sur la trigonométrie

Exercice 0.1 On sait que,

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Démontrer cette formule à partir des exponentielles complexes.

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \mathrm{Re}(e^{i(a+b)}) \\ &= \mathrm{Re}(e^{ia} \times e^{ib}) \\ &= \mathrm{Re}((\cos(a)+i\sin(a) \times (\cos(b)+i\sin(b)) \\ &= \mathrm{Re}(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b))) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Exercice 0.2 On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Démontrer cette formule de deux manières différentes.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en utilisant la formule d'additivité,

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en utilisant la méthode de délinéarisation,

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \mathrm{Re}(e^{i2x}) \\ &= \mathrm{Re}([e^{ix}]^2) \\ &= \mathrm{Re}([\cos x + i\sin x]^2) \\ &= \mathrm{Re}(\cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1\end{aligned}$$

Exercice 0.3 Résoudre les équations suivantes.

a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $x \in [0, 2\pi]$

Soit $x \in [0,2\pi]$. On a,

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

c) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ avec $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Soit $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. On a,

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{7\pi}{6}$$

d) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Soit $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. On a,

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

Pour bien démarrer : des rappels sur les fonctions bijectives

Proposition 0.4 Soient $f : I \to J$ et $g : J \to I$. On suppose que
① Pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$.
② Pour tout $x \in J$, $f(g(x)) = x$.
Alors, f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par g.

Exemple 0.5 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Proposition 0.6 — Composée de f et f^{-1}. Soit f une fonction bijective de I vers J. Alors,

a) Pour tout $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$.

b) Pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

De plus, pour tout $x \in I$ et $y \in J$, on a

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Exemple 0.7 Montrer que la fonction $f :]-2, +\infty[\to]1, +\infty[, x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Proposition 0.8 — Théorème de la bijection. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que
① L'ensemble I est un **intervalle**.
② f est **continue** sur I,
③ f est **strictement monotone** sur I.
Alors, la fonction f réalise une bijection de I sur l'*intervalle* $J = f(I)$. On note $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.

Exemple 0.9 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer.

1 Logarithme décimal et en base 2

Définition 1.1

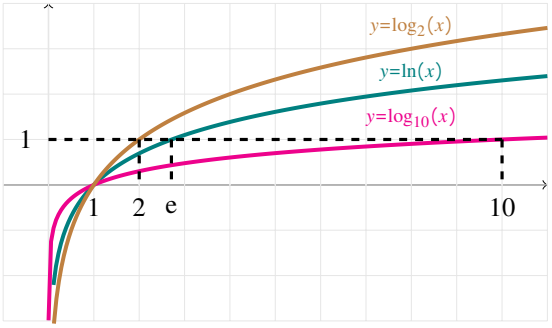
- Le **logarithme décimal**, notée $\log_{10}$ ou log, est la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} \log_{10} & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{array}$$

- Le **logarithme en base** 2, notée $\log_2$, est la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} \log_2 & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} \end{array}$$

Les graphes du logarithme décimal et en base 2 s'obtiennent par **dilatation verticale** du graphe du logarithme népérien : la courbe s'aplatit verticalement pour le logarithme décimal (le rapport de la dilatation est $\frac{1}{\ln(10)} < 1$) et s'élargit verticalement pour le logarithme en base 2 (le rapport de la dilatation est $\frac{1}{\ln(2)} > 1$).



Les règles de calcul du logarithme népérien s'étendent au logarithme décimal et au logarithme en base 2. La différence est que

$$\log_{10}(10) = 1 \quad \text{et} \quad \log_2(2) = 1 \quad \text{au lieu de} \quad \ln(\mathrm{e}) = 1$$

Le logarithme décimal est utilisé notamment en physique-chimie et le logarithme en base 2 en informatique. L'intérêt de ces deux fonctions est la propriété suivante.

Proposition 1.2 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^n) = n$ et $\log_2(2^n) = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a,

$$\log_{10}(10^n) = \frac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \frac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$$

■

2 Fonctions puissances

2.1 Définition de a^b

Définition 2.1 — Puissances entières. Soit n un entier naturel. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

En utilisant les propriétés du logarithme, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall x > 0, \qquad x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln(x))$$

Cela permet de donner un sens aux puissances non entières.

Définition 2.2 — Puissances réelles. Soit a un réel. On pose,

$$\forall x > 0, \qquad x^a = \exp(a\ln(x))$$

La puissance $\frac{1}{2}$ coincide avec la fonction racine carrée. La puissance -1 coincide avec la puissance inverse. Les règles de calcul, sont les mêmes pour les puissances entières et pour les puissances réelles : seul le domaine de validité des relations change, une puissance réelle étant définie uniquement pour les réels strictement positifs.

Proposition 2.3 — Règles de calcul sur les puissances. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

a) $x^a \times x^b = x^{a+b}$ b) $(x^a)^b = x^{a\times b}$ c) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

d) $(x\times y)^a = x^a \times y^a$ e) $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ f) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Exemple 2.4 Calculer les puissances suivantes.

a) $2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{12}}$

b) $(5^{\frac{1}{4}})^4 = 5^{\frac{1}{4}\times 4} = 5^1 = 5$

c) $2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{4}} = (2\times 3)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}}$

d) $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$

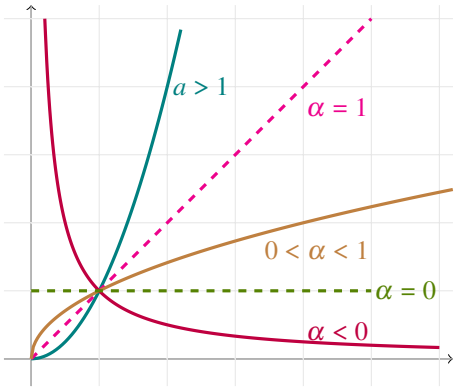
e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1^a = e^{a\ln(1)} = e^0 = 1$

f) Pour tout $x > 0$, $x^0 = e^{0\ln(x)} = e^0 = 1$

2.2 Fonctions puissances (entières et réelles)

Définition 2.5 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction **puissance** a par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$$



? Une fonction puissance réelle n'est définie que pour des valeurs strictement positives à cause de la présence du logarithme dans sa définition. Cependant, certaines fonctions puissances s'étendent naturellement à un domaine plus large.

Fonction	Domaine de définition
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^{-1}$	$\mathbb{R}^*$

De manière générale,

- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ peut être définie sur $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$, en la prolongeant en 0 par la valeur 0. On parle de **prolongement par continuité** en 0.
- Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{-n}$ peut être définie sur $\mathbb{R}^*$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f_a : x \mapsto x^a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

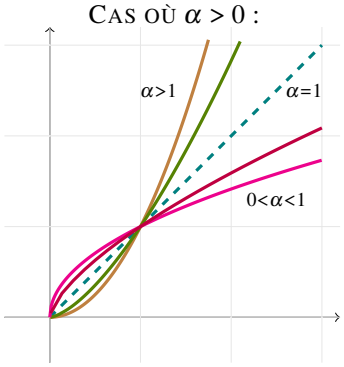
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_a'(x) = ax^{a-1}$$

Démonstration. Pour tout $x > 0$, $f_a(x) = x^a = \exp(a\ln(x))$. Ainsi, la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que **composée** de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_a'(x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln(x)) = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}$$

■

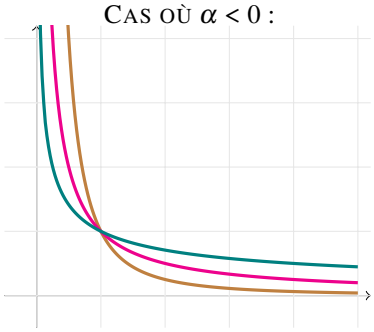
Cas où $\alpha > 0$:



Par exemple, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, ….

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

Cas où $\alpha < 0$:



Par exemple, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0

Exemple 2.7 Déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^x$.

Si la variable de la fonction apparaît dans l'exposant, on étudie la fonction grâce à sa forme exponentielle :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad f(x) = \exp(x\ln(1+x))$$

- La fonction f est définie si et seulement si $1+x>0$ soit si et seulement si $x>-1$. D'où

$$\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$$

- La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur ce domaine. De plus,

$$\forall x > -1, \qquad f'(x) = \left[\ln(1+x) + x \times \frac{1}{x+1}\right]\exp(x\ln(1+x))$$

Proposition 2.8 Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tous $x, y > 0$, on a

$$x^a = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y^{\frac{1}{a}}$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$. On a,

$$\begin{aligned}
x^a = y &\iff \exp(a\ln(x)) = y && \text{licite car } x>0\\
&\iff a\ln(x) = \ln(y) && \text{licite car } y>0\\
&\iff \ln(x) = \tfrac{1}{a}\ln(y) && \text{licite car } a\neq 0\\
&\iff x = \exp\left(\frac{1}{a}\ln(y)\right)\\
&\iff x = y^{\frac{1}{a}}
\end{aligned}$$

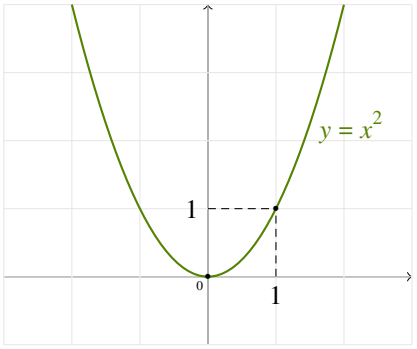
■

Exemple 2.9 Résoudre l'équation $3^x = \frac{9^x}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} 3^x = \frac{9^x}{2} &\iff 2\exp(x\ln(3)) = \exp(x\ln(9)) \\ &\iff \ln(2) + x\ln(3) = x\ln(9) \\ &\iff \ln(2) + x\ln(3) = 2x\ln(3) \\ &\iff \ln(2) = x\ln(3) \\ &\iff x = \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{aligned}$$

2.3 Racines n-ièmes



Exemple 2.10 Déterminer si la fonction carrée $x \mapsto x^2$ est bijective de I vers J pour les intervalles donnés ci-dessous.

Départ I	Arrivée J	Bij. de I vers J ?
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	Pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	Bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_+$	Bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$

Définition 2.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de

a) $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair,

b) $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si n est impair.

Sa bijection réciproque est appelée **racine n-ième**.

a) Si n est pair :

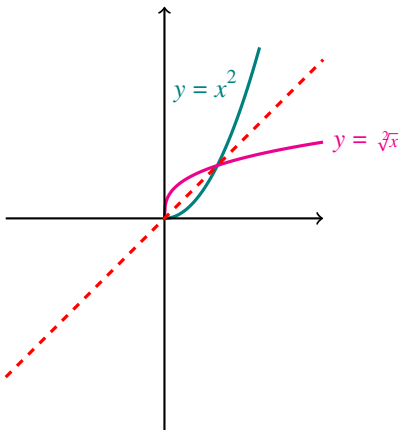
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

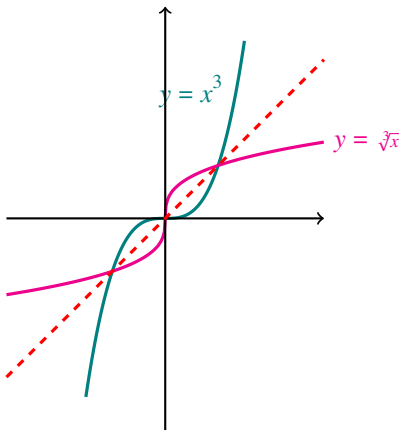
b) Si n est impair :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Proposition 2.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x > 0, \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$





Exemple 2.13 Calculer les racines n-ièmes suivantes.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = 8$

c) $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$ et $3 > 0$ (on a aussi que $(-3)^4 = 81$ mais on prend la solution positive)

d) $\sqrt[4]{-81}$ n'existe pas car $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ est définie uniquement sur $[0, +\infty[$ (car 4 est pair)

Proposition 2.14 — Composée puissance n et racine n-ième, cas n pair.

a) Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$

b) Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x^n} = x$

De plus, pour tout $x, y \geq 0$, on a,

$$y^n = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt[n]{x}$$

Exemple 2.15 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers naturels le plus petit possible.

a) $\sqrt{1300} = \sqrt{13 \times 10^2} = 10\sqrt{13}$

b) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{75} - 3\sqrt{48} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3 \times 5^2} - 3\sqrt{3 \times 4^2} = 13\sqrt{3}$

Proposition 2.16 — Composée puissance n et racine n-ième, cas n impair.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$

De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a,

$$y^n = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt[n]{x}$$

3 Fonctions hyperboliques : ch et sh

Définition 3.1

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rccc} \text{ch} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique**, notée sh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rccc} \text{sh} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 3.2 — Relation fondamentale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Exemple 3.3 Soient x et y des réels. Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, l'expression suivante.

$$\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)+\mathrm{ch}(y)\,\mathrm{sh}(x)$$

Soient x et y des réels. On a,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)+\mathrm{ch}(y)\,\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\times\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\frac{e^y+e^{-y}}{2}\times\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}-e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{y-x}}+\cancel{e^{-y+x}}-e^{-y-x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+y}-e^{-(x+y)}\right)\\ &= \mathrm{sh}(x+y)\end{aligned}$$

Proposition 3.4 — Propriétés de la fonction sh.

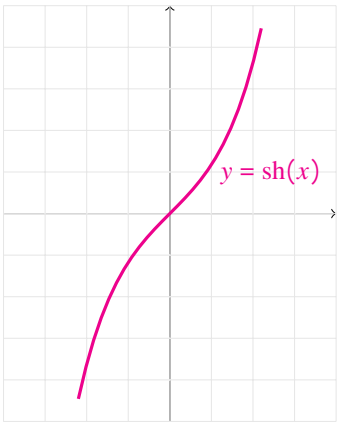
1. On a $\mathrm{sh}(0)=0$.
2. La fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction sh en $\pm\infty$ sont les suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$$

4. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$$

5. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction sh n'est ni minorée ni majorée sur $\mathbb{R}$.



Démonstration.

1. On a,

$$\mathrm{sh}(0)=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

2. Montrons que sh est impaire sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord, le domaine de définition de sh, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0. Montrons que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{sh}(-x)=-\mathrm{sh}(x)$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a,

$$\mathrm{sh}(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\mathrm{sh}(x)$$

3. On sait que

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to-\infty}e^X=0$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$$

4. On admet que la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée est donnée par

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{sh}'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-(-e^{-x})\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}(x)$$

5. On peut commencer par remarquer que, par positivité de l'exponentielle,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)>0$$

On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

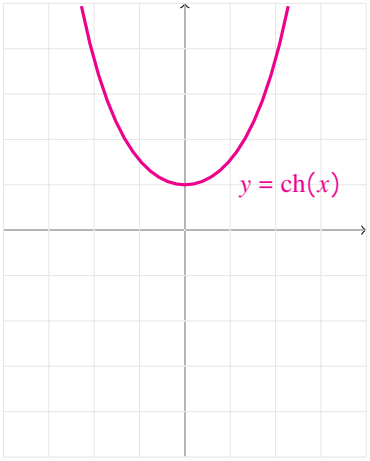
Donc la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6. La fonction sh n'est pas majorée car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. De même, elle n'est pas minorée car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.

■

Proposition 3.5 — Propriétés de la fonction ch.

1. On a $\mathrm{ch}(0) = 1$.
2. La fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction ch en $\pm\infty$ sont les suivantes :
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$
4. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$$
5. La fonction ch est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
6. La fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et non majorée.



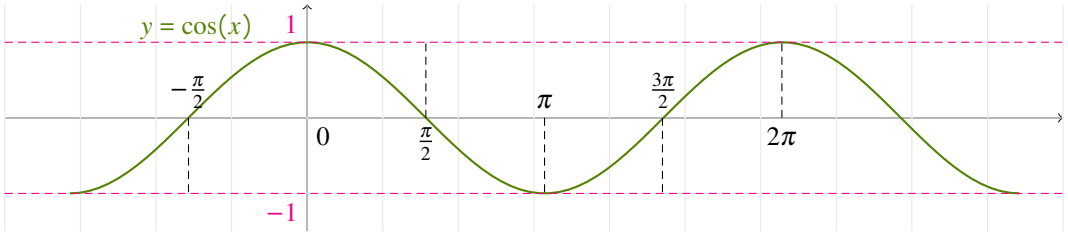
Preuve de 5. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

■

4 Fonctions circulaires réciproques : Arcsin, Arccos, Arctan

4.1 Arcsin

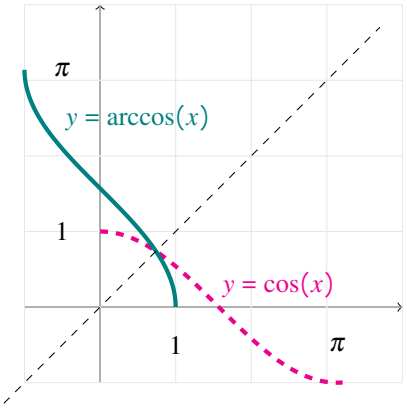


Exemple 4.1 Déterminer si la fonction cosinus est bijective de I vers J pour les intervalles donnés ci-dessous.

Intervalle de départ I	Intervalle d'arrivée J	Bijective de I vers J ?
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	Cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$
$[0,\pi]$	$\mathbb{R}$	Cosinus n'est pas bijective de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$
$[0,\pi]$	$[-1,1]$	Cosinus est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$
$[\pi,2\pi]$	$[-1,1]$	Cosinus est bijective de $[\pi,2\pi]$ dans $[-1,1]$

Définition 4.2 La fonction **arc cosinus**, notée arccos, est la bijection réciproque de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$.

$$\begin{array}{rccc} \arccos & : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$



Démonstration. On sait que
- L'ensemble $[0,\pi]$ est un intervalle
- La fonction cos est **continue** sur $[0,\pi]$
- La fonction cos est **strictement décroissante** sur $[0,\pi]$

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**,

cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $f([0,\pi]) = [-1,1]$

et on note $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ sa bijection réciproque. ■

? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1,1]$, $\theta = \arccos(x)$ est l'unique angle $\theta \in [0,\pi]$ dont le cosinus vaut x, c'est-à-dire $\cos(\theta) = x$.

Exemple 4.3 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction arccos.

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$	car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$.
$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	car $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$.
$\arccos(-1) = \pi$	car $\cos(\pi) = -1$ et $\pi \in [0,\pi]$.
$\arccos(1) = 0$	car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0,\pi]$.

Proposition 4.4 — Composée de cos et arccos.

a) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ b) Pour tout $x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in [-1,1]$ et $x \in [0,\pi]$,

$$y = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(y)$$

! Il faut faire très attention aux domaines de validité des relations précédentes. En effet,

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Exemple 4.5 Montrer que,

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Soit $x \in [-1,1]$. On a,

$$[\sin(\arccos(x))]^2 = 1 - [\cos(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2$$

Donc,

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{ou} \qquad \sin(\arccos(x)) = -\sqrt{1-x^2}$$

Or, $\arccos(x) \in [0,\pi]$ et sinus est positive sur $[0,\pi]$ donc,

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Proposition 4.6 — Dérivée de arccos. La fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

? De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $]-1,1[$, alors la fonction $x \mapsto \arccos(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$x \mapsto -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Démonstration.

- D'après le théorème de la bijection, la fonction arccos sur $[-1,1]$ a la même monotonie que cos sur $[0,\pi]$: elle est donc **strictement décroissante** sur $[-1,1]$.
- Montrons que arccos est continue sur $[-1,1]$.
  - La fonction cos est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
  - La fonction cos est continue sur $[0,\pi]$.

  Alors, (cf Proposition 2.9 du Chapitre 4), la fonction arccos est **continue** sur $[-1,1]$.

Montrons que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et calculons sa dérivée.

- La fonction cos est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
- La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$.
- La dérivée de cos (qui est $x \mapsto -\sin(x)$) ne s'annule pas sur $]0,\pi[$.

Alors, (cf Proposition 2.10 du Chapitre 4), la fonction arccos est **dérivable** sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en utilisant l'Exemple 4.5. ■

Exemple 4.7 Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \arccos(x^2)$ (en ayant au préalable donné son domaine de définition).

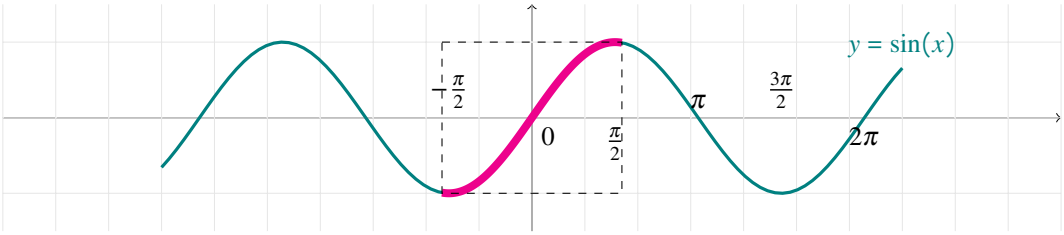
On peut remarquer que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad -1 \leq x^2 \leq 1$$

Donc la fonction f est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ telle que

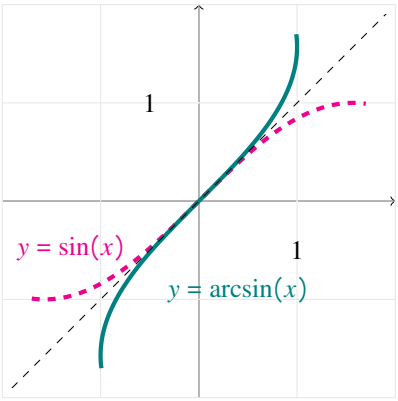
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

4.2 Arcsin



Définition 4.8 La fonction **arc sinus**, notée arcsin, est la bijection réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{array}{rccc} \arcsin & : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & & x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array}$$



Démonstration. On sait que

- L'ensemble $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est un intervalle
- La fonction sin est **continue** sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- La fonction sin est **strictement croissante** sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**,

sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$

et on note $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque. ■

? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1,1]$, $\theta = \arcsin(x)$ est l'unique angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x, c'est-à-dire $\sin(\theta) = x$.

Exemple 4.9 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction arcsin.

$\arcsin(0) = 0$	car $\sin(0) = 0$ et $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	car $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$	car $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$	car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 4.10 — Composée de sin et arcsin.

a) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$

b) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in [-1,1]$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$y = \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(y)$$

Proposition 4.11 — Dérivée de arcsin. La fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

? De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $]-1,1[$, alors la fonction $x \mapsto \arcsin(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Exercice 4.12 Montrer que,

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

On cherche à montrer qu'une fonction est constante : pour cela, il suffit de montrer que sa dérivée s'annule.

On pose

$$\begin{array}{rccc} f & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \arccos(x) + \arcsin(x) \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

De plus, on vérifie que l'égalité est également vraie pour $x = -1$ et $x = 1$.

Proposition 4.13 La fonction arcsin est impaire (sur $[-1,1]$).

Démonstration. Tout d'abord, le domaine de définition de la fonction arcsin, qui est $[-1,1]$, est symétrique par rapport à 0. Montrons que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

Soit $x \in [-1,1]$. On a,

$$\sin(\arcsin(\underbrace{-x}_{\in[-1,1]})) = -x = -\sin(\arcsin(\underbrace{x}_{\in[-1,1]})) = \sin(-\arcsin(x))$$

car sinus est impaire. Ainsi,

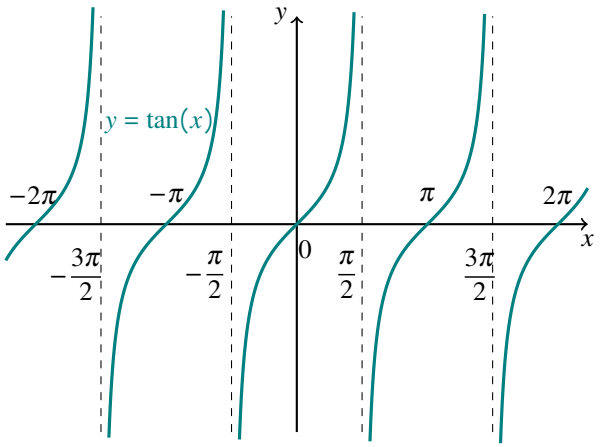
$$\sin(\arcsin(-x)) = \sin(-\arcsin(x))$$

Comme $\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

■

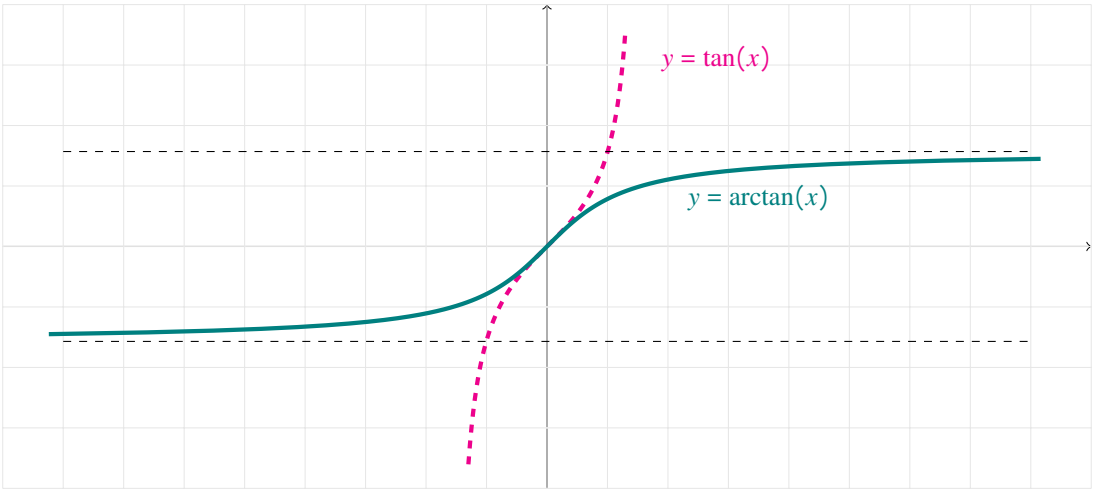
4.3 Arctan



On peut montrer, grâce au **théorème de la bijection**, que la fonction tangente, réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 4.14 La fonction **arc tangente**, notée arctan, est la bijection réciproque de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{array}{rccc} \arctan & : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$



? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1,1]$, $\theta = \arctan(x)$ est l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x, c'est-à-dire $\tan(\theta) = x$.

Exemple 4.15 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction arcsin.

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$	car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$	car $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$	car $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition 4.16 — Composée de tan et arctan.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$

b) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$y = \tan(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(y)$$

Proposition 4.17 La fonction arctan est impaire (sur $\mathbb{R}$).

Proposition 4.18 — Dérivée de arctan. La fonction arctan est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

? De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \arctan(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Preuve du caractère dérivable.

Montrons que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.

- La fonction tan est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- La dérivée de tan (qui est $x\mapsto 1+\tan^2(x)$ ou encore $x\mapsto\frac{1}{\cos^2(x)}$) ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Alors, (cf Proposition 2.10 du Chapitre 4), la fonction arctan est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \arctan'(x)=\frac{1}{\tan'(\arctan(x))}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

en utilisant l'Exemple 4.5. ■