# DS 2

*Samedi 8 novembre, de 8h à 11h*

---

**Exercice 1 – Questions de cours.** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = -z$. Que peut-on dire de $z$ ? *On ne demande pas de démonstration.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = -z$. Alors $\boxed{z \in i\mathbb{R}}$.

2. Donner la définition d'une fonction $f$ bijective de $I$ vers $J$.

   On dit qu'une fonction $f$ est bijective de $I$ vers $J$ si

   $$\boxed{\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x)}$$

3. Développer, à l'aide du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x-1)^4$.

   Grâce au binôme de Newton, on obtient,

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad (2x-1)^4} = (2x)^4 + 4(2x)^3 \times (-1) + 6(2x)^2 \times (-1)^2 + 4(2x) \times (-1)^3 + (-1)^4$$
   $$\boxed{= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1}$$

4. Énoncer les formules d'Euler.

   Les formules d'Euler sont les suivantes :

   $$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

5. Résoudre le système suivant à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système linéaire grâce à la **méthode du pivot de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 & (L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1) \\ -3y - 4z = 2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -2z = 4 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 & (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$

Ce système linéaire admet donc une unique solution, donnée par le triplet $(1,2,-2)$.

**Vérification.** Le triplet $(1,2,-2)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2\times(-2) = -1 & \checkmark \\ 2\times 1 - 2 + 2\times(-2) = -4 & \checkmark \\ 4\times 1 + 2 + 4\times(-2) = -2 & \checkmark \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs suivantes de la fonction arccos.

a) On a $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$.

b) On a $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [0,\pi]$.

c) On a $\arccos(1) = 0$ car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0,\pi]$.

**Exercice 2 –** On cherche à résoudre l'équation $(E_1) : z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On considère l'équation $(E_1') : Z^2 - (5-14i)Z - 2(12+5i) = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

   (a) Justifier que le discriminant de cette équation de second degré vaut

   $$\Delta = 25(-3-4i)$$

   Il s'agit d'une équation de second degré de la forme $aZ^2 + bZ + c = 0$ où $a = 1$, $b = -5+14i$ et $c = -2(12+5i)$. Son discriminant est

   $$\boxed{\Delta} = b^2 - 4ac = (-5+14i)^2 - 4(-2(12+5i)) = -75 - 100i \boxed{= 25(-3-4i)}$$

   (b) Calculer $(1-2i)^2$.

   On développe :

   $$\boxed{(1-2i)^2} = 1^2 + (2i)^2 - 2 \cdot 2i \boxed{= -3-4i.}$$

   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation $(E_1')$.

   Il s'agit d'une équation de second degré dont le discriminant est

   $$\Delta = 25(-3-4i) = 5^2 \times (1-2i)^2 = (5-10i)^2 = \delta^2$$

   en utilisant les deux questions précédentes. Comme $\Delta \neq 0$, l'équation $(E_1')$ admet deux solutions complexes, données par,

   $$Z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \boxed{-2i} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \boxed{5-12i}$$

2. Donner la forme trigonométrique de $-2i$

   On obtient directement que

   $$\boxed{-2i = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

3. Résoudre l'équation $\omega^2 = 5-12i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.

   Posons $w = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

   $$w^2 = 5-12i \iff \begin{cases} w^2 = 5-12i \\ |w|^2 = |5-12i| \end{cases} \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = 5-12i \\ x^2+y^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 5-12i \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} 2xy = -12 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2 - y^2 = 5 \quad (L_2) & \text{(égalité des parties réelles)} \\ x^2+y^2 = 13 \quad (L_3) \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} xy = -6 \quad \text{(donc } x \text{ et } y \text{ de signes contraires)} \\ x^2 = 9 \quad \left(L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2+L_3)\right) \\ y^2 = 4 \quad \left(L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3-L_2)\right) \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} xy = -6 \\ x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$$

   $$\iff w = 3-2i \quad \text{ou} \quad w = -3+2i.$$

L'équation $\omega^2 = 5 - 12i$ admet deux solutions : $\boxed{3-2i \text{ et } -3+2i.}$

**Vérification.** $(3-2i)^2 = 5-12i$✓

4. Résoudre l'équation $\omega^2 = -2i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.

Posons $\omega = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
z^2 = -2i &\iff r^2 e^{2i\theta} = 2 \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \\
&\iff \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \text{ car } r > 0 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff z = \sqrt{2} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1\}. \\
&\iff z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&\iff z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i
\end{aligned}$$

L'équation $\omega^2 = -2i$ admet deux solutions : $\boxed{1-i \text{ et } -1+i}$.

**Vérification.** $(1-i)^2 = -2i$✓

5. En déduire toutes les solutions de $(E_1)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E_1) &\iff z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0 \\
&\iff Z^2 - (5-14i)Z - 2(12+5i) = 0 \quad \text{avec } Z = z^2 \\
&\iff Z = -2i \text{ ou } Z = 5 - 12i \qquad \text{cf Question 1c} \\
&\iff z^2 = -2i \text{ ou } z^2 = 5 - 12i \\
&\iff z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i \text{ ou } z = 3 - 2i \text{ ou } z = -3 + 2i \qquad \text{cf Questions 3 et 4}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $(E_1)$ admet $\boxed{\text{quatre solutions}}$ données par

$$\boxed{1-i, \qquad -1+i, \qquad 3-2i, \quad \text{et} \quad -3+2i}$$

On cherche maintenant à résoudre l'équation $(E_2) : z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

6. Factoriser, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 + 1$ par $z + 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a, en utilisant la formule du cours permettant de factoriser $a^n - b^n$ par $a - b$,

$$\begin{aligned}
\boxed{z^5 + 1} &= z^5 - (-1)^5 \\
&= (z - (-1))(z^4 + z^3 \times (-1) + z^2 \times (-1)^2 + z \times (-1)^3 + (-1)^4) \\
&\boxed{= (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)}
\end{aligned}$$

7. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad \iff \quad z^5 + 1 = 0 \text{ et } z \neq -1$$

- Sens direct. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = (z+1) \times 0 = 0$$

De plus, $z \neq -1$, car $-1$ n'est pas une solution de l'équation $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 + 1 = 0$ et $z \neq -1$. Alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= \frac{z^5 + 1}{z + 1} \qquad \text{licite car } z \neq -1 \\ &= \frac{0}{z + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8. En déduire toutes les solutions de $(E_2)$. *On les exprimera sous forme exponentielle en faisant apparaître l'argument principal, sauf pour les solutions réelles qu'on laissera telles quelles.*

On va utiliser les racines 5-ièmes de l'unité. Rappelons que

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{-\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}}\right\}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \boxed{z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0} &\iff z^5 + 1 = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff (-z)^5 = 1 \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff -z \in \mathbb{U}_5 = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{-\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}}\right\} \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff z \in \left\{-1, -\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, -\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, -\mathrm{e}^{-\frac{4i\pi}{5}}, -\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}}\right\} \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff z \in \left\{\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{-\frac{4i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}}\right\} \\ &\iff z \in \left\{\mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{9i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{5}}\right\} \\ &\boxed{\iff z \in \left\{\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{5}}\right\}.} \end{aligned}$$

**Exercice 3 –** (...)

**Exercice 4 –** Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^{a_k}$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = 0$. Calculer $S_n$ pour $\alpha = 0, \alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

   Lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = 0$, la somme devient

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^0 = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha$$

   - Si $\alpha = 0$, on reconnait la **somme d'une constante** et alors

     $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1 \times (n - 0 + 1) = \boxed{n+1}$$

   - Si $\alpha = 1$, on reconnait la **somme des premiers entiers** et alors

     $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^1 = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

   - Si $\alpha = 2$, on reconnait la **somme des carrées des premiers entiers** et alors

     $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k$. Calculer $S_n$.

   Lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k$ et $\alpha = 0$, la somme devient

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

   On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, et on obtient alors

   $$S_n = 2^0 \times \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1-2} = \boxed{2^{n+1} - 1}$$

On suppose dans toute la suite de cet exercice que

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = k.$$

Ainsi, dans ce cas,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k 2^k$$

On propose ni une ni deux mais trois méthodes pour calculer $S_n$.

3. Calculer $S_1$ et $S_2$.

   On a,

   $$\boxed{S_1} = \sum_{k=0}^{1} k 2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 \boxed{= 2}$$

   De même,

   $$\boxed{S_2} = \sum_{k=0}^{2} k 2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 \boxed{= 10}$$

4. (*Grâce à un changement d'indice*)

(a) Justifier que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$

Par définition,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = 0 \times 2^0 + \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

En effectuant le changement d'indice $k = j + 1$, on obtient,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n+1} (j+1)2^{j+1}$$

c'est-à-dire (en renommant la variable de sommation qui est une variable muette

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}}$$

(b) En déduire que

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^{k+1}$$

Donc, en utilisant la linéarité de la somme, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{S_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k2^k \times 2^1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \times 2^1 \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} k2^k + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n - n2^n\right) + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{n} k2^k - n2^n\right) + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} k2^k - n2 \times 2^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&\boxed{= 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k}
\end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de $S_n$.

D'après la question précédente,

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

On obtient donc que

$$S_n = n2^{n+1} - 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

Or la somme restante est une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, donc on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{S_n} &= n2^{n+1} - 2 \times 2^0 \times \frac{1-2^{n-1-0+1}}{1-2} \\ &= n2^{n+1} - 2(2^n - 1) \\ &\boxed{= (n-1)2^{n+1} + 2}\end{aligned}$$

(d) Vérifier que la formule trouvée coïncide avec les réponses de la question 3.

On vient de démontrer à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Pour $n = 1$, on obtient

$$S_1 = (1-1)2^{1+1} + 2 = 2$$

et pour $n = 2$, on obtient,

$$S_2 = (2-1)2^{2+1} + 2 = 10$$

On retrouve bien les mêmes résultats qu'à la question 3.

5. (*Grâce à une fonction auxiliaire*) Soit

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \end{aligned}$$

(a) En calculant de deux façons la dérivée de $f$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

D'une part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1}.$$

D'autre part, on reconnaît une somme géométrique. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les deux calculs de dérivée, on obtient,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$$

(b) Retrouver alors la valeur de $S_n$.

On sait que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$$

Or à la question précédente, on vient de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Donc, en prenant $x = 2$, dans cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} \\ &= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2^n(2n - n - 1) + 1 \\ &= 2^n(n-1) + 1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n} = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2\left[2^n(n-1)+1\right] \boxed{= 2^{n+1}(n-1) + 2}$$

(Et on retrouve bien le résultat précédent.)

6. (*Grâce à une méthode mystère pas si mystérieuse si on regarde bien les questions...*)

(a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(k+1)2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{(k+1)2^{k+1} - k2^k} &= (k+1)2^k \times 2 - k2^k \\ &= 2^k[(k+1)\times 2 - k] \\ &= 2^k[2k + 2 - k] \\ &= 2^k[k+2] \\ &\boxed{= k2^k + 2^{k+1}}\end{aligned}$$

(b) Retrouver alors la valeur de $S_n$.

Par construction,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

Or, on vient de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k2^k = (k+1)2^{k+1} - k2^k - 2^{k+1}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)2^{k+1} - k2^k - 2^{k+1}\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)2^{k+1} - k2^k\right] - \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}$$

Or, la première somme est télescopique, on obtient donc,

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)2^{k+1}-k2^{k}\right]=(n+1)2^{n+1}-0\times 2^{0}=(n+1)2^{n+1}$$

La deuxième somme est une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ (à facteur 2 près) et donc,

$$\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}=2\sum_{k=0}^{n}2^{k}=2\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2(2^{n+1}-1)$$

Finalement, en combinant ces deux calculs, on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{S_n} &= (n+1)2^{n+1}-2(2^{n+1}-1)\\ &= 2^{n+1}(n+1-2)+2\\ &\boxed{= 2^{n+1}(n-1)+2}\end{aligned}$$

(Et on retrouve bien le résultat habituel...)