CONCOURS BLANC 2

Samedi 19 Septembre 2026 - Durée : 3h

Les consignes à respecter sont les suivantes.

① *Chaque réponse doit commencer par une* ***phrase annonçant le but*** *du raisonnement qui va suivre.*

② *Chaque réponse doit finir par une* ***phrase de conclusion*** *annonçant le résultat qui vient d'être démontré.*

③ *Le* ***résultat*** *de chaque question doit être* ***encadré à la règle*** *(on encadrera soit le résultat numérique final pour une question calculatoire, soit la phrase de conclusion).*

Le respect de ces trois consignes comptera pour ***deux points*** *dans la note finale.*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Recopier et compléter la définition d'une fonction paire donnée ci-dessous.

   Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est une fonction paire si...

2. Tracer sur votre copie un cercle trigonométrique, puis y placer les angles

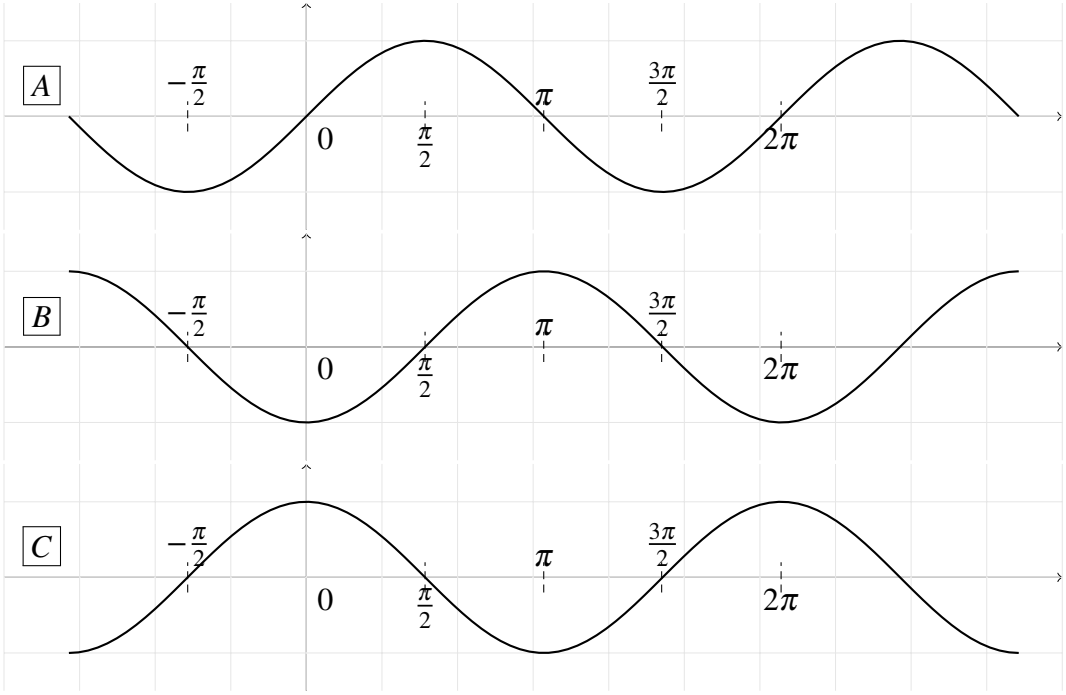
$$\frac{\pi}{4}, \qquad -\frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{5\pi}{6}$$

   en indiquant les valeurs de cosinus et sinus associées pour chaque angle.

3. Pour chacune des trois fonctions suivantes

   a) $f_1 : x \mapsto \cos(x+\pi)$ b) $f_2 : x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ c) $f_3 : x \mapsto -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

   reconnaître sa courbe représentative parmi les propositions ci-dessous. *Justifier.*



Exercice 2 – Adapté d'un sujet de concours de la banque PT. On considère les fonctions ϕ et ψ, qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \; ; \qquad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction ϕ est $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\phi(\frac{1}{2})$ et $\psi(\frac{1}{2})$.
3. Étudier la parité de la fonction ϕ.
4. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude de la fonction ϕ, et pour sa courbe représentative ?
5. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
6. Déterminer pour tout réel x la valeur de $\phi'(x)$.
7. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$. *On admet que*

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = -5 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = -5$$

8. Résoudre l'équation $\phi(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
9. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

   Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?
10. La fonction ϕ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
11. On définit la fonction f par

$$f : x \mapsto \frac{2\sqrt{3 - 3x}}{\sqrt{x + 5}}$$

    On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Que vaut $\mathcal{D}_f$?
12. Montrer que

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \qquad \phi(f(x)) = x$$

Exercice 3 – Soit $\theta = \frac{\pi}{5}$. Le but de cet exercice est principalement de déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 1 : Quelques questions intermédiaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   (c) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.

Partie 2 : Première méthode

2. Calculer $\cos(2025 \times \theta)$.
3. Justifier que $\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$ et que $\cos(4\theta) = -\cos(\theta)$.
4. En déduire, grâce à la première partie, une équation vérifiée par $\cos(\theta)$.
5. Justifier que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)$$

6. En déduire que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

7. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
8. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 3 : Deuxième méthode

9. Résoudre l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
10. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$(2\cos(\varphi) + 1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

11. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in]0, 2\pi[$, on a

$$\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

12. En prenant $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$, montrer que $\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}$.
13. Justifier que

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)}{2}$$

14. A l'aide de la question 3., en déduire que $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.
15. Déduire des questions précédentes une équation du second degré vérifiée par $\cos(\theta)$.
16. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.