DM 1

À rendre pour le lundi 5 octobre 2026 (facultatif)

Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-3)$ b. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$ c. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

Effectuer, pour chaque réponse donnée, une **vérification.**

Exercice 2 – Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\text{(E)} \qquad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe ib est une solution de l'équation (E) si et seulement si b est une solution réelle de deux équations polynomiales à coefficients réels.
2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution de la forme ib (avec $b \in \mathbb{R}$) que l'on déterminera.
3. Déterminer a et b deux nombres complexes tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + az + b)$$

4. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 3 – On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

1. Montrer, grâce au théorème de la bijection, que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. *On admettra que*
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$
2. Déterminer la bijection réciproque de f.