DM 1

À rendre pour le lundi 5 octobre 2026 (facultatif)

Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-3)$ b. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$ c. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

Effectuer, pour chaque réponse donnée une **vérification.**

a. Par **linéarité** de la somme, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{S_1} &= \sum_{k=1}^{n} (2k-3) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3 \times (n-1+1) \\ &= n(n+1) - 3n \\ &\boxed{= n^2 - 2n} \end{aligned}$$

b. On reconnaît ici une somme **géométrique**. On a alors,

$$\begin{aligned} \boxed{S_2} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} 2^k \\ &= 2 \times 2^1 \times \frac{1-2^{n-1+1}}{1-2} \\ &\boxed{= -4(1-2^n)} \end{aligned}$$

c. On reconnaît ici une somme **télescopique**. On obtient donc,

$$\begin{aligned} \boxed{S_3} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\ &\boxed{= 1 - \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

Exercice 2 – Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \qquad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

1. Soit $b\in\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe ib est une solution de l'équation (E) si et seulement si b est une solution réelle de deux équations polynomiales à coefficients réels.

   Soit $b\in\mathbb{R}$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on a,

   $$z=ib \text{ est solution de l'équation} \iff \boxed{\begin{cases} b^2-3b-10=0 \\ b^3-2b^2-3b+10=0 \end{cases}}$$

2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution de la forme ib (avec $b\in\mathbb{R}$) que l'on déterminera.

   Soit $b\in\mathbb{R}$. En résolvant la première équation (qui est une équation de second degré), on a,

   $$\begin{aligned} z=ib \text{ est solution de l'équation} &\iff \begin{cases} b=-2 \text{ ou } b=5 \\ b^3-2b^2-3b+10=0 \end{cases} \\ &\iff b=-2 \end{aligned}$$

   car -5 n'est pas solution de la deuxième équation polynomiale. Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution de la forme ib (avec $b\in\mathbb{R}$) qui est $\boxed{-2i.}$

3. Déterminer a et b deux nombres complexes tels que

   $$\forall z\in\mathbb{C},\quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5(1-i))$$

   Par identification des coefficients, on a $\boxed{b=5(-1+i) \text{ et } a=-1-4i.}$

4. En déduire toutes les solutions de (E).

   Cherchons les racines de la fonction polynomiale Q définie par

   $$\forall z\in\mathbb{C},\qquad Q(z)=z^2-(1+4i)z-5(1-i)$$

   Le discriminant vaut $\Delta=5-12i$. Cherchons les racines carrées de Δ sous la forme $\omega=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned} \omega^2=5-12i &\iff \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=-12 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^2=18 \\ 2b^2=8 \\ ab<0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a=3 \text{ et } b=-2 \\ \text{ ou} \\ a=-3 \text{ et } b=2 \end{cases} \\ &\iff \omega=3-2i \text{ ou } \omega=-3+2i \end{aligned}$$

   On en déduit que les racines de Q sont $2+i$ et $-1+3i$. Puis, les solutions de (E) sont

   $$\boxed{-2i,\quad 2+i \quad \text{et} \quad -1+3i}$$

Exercice 3 – On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

1. Montrer, grâce au théorème de la bijection, que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. *On admettra que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

① L'ensemble $[0, +\infty[$ est un **intervalle**.
② La fonction f est **continue** sur $[0, +\infty[$.
③ La fonction f est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$ car

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$$

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [0, 1[$.

2. Déterminer la bijection réciproque de f.

Soit $y \in [0, 1[$. On a,

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{x}{1+x} \\
&\iff \quad y(1+x) = x \\
&\iff \quad y + yx = x \\
&\iff \quad x(y-1) = -y \\
&\iff \quad x = -\frac{y}{y-1} \qquad \text{(licite car } y \neq 1\text{)} \\
&\iff \quad x = \frac{y}{1-y}
\end{aligned}$$

Ainsi, la bijection réciproque de f est $f^{-1} : [0, 1[\to [0, +\infty[$ telle que

$$\forall y \in [0, 1[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$