5. Sommes, Produits & Coefficients binomiaux

1 Sommes

1.1 Le symbole $\sum$

On souhaite avoir une *écriture simplifiée* et *compacte* d'opérations comme la *somme* des 50 premiers entiers naturels :

$$1+2+3+4+\cdots+50,$$

ou comme le calcul du *cumul* des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

Définition 1.1 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ (p est l'indice de départ de la somme, q l'indice de fin). Soient $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ des nombres réels. La *somme* de tous les termes $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ se note :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Cette notation se lit «la *somme* des u_k pour k variant de p à q». Par convention, si $p > q$ (somme vide), on considère que la somme est nulle.

! L'*indice de sommation* est une *lettre muette* :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{\square=p}^{q} u_\square = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Ainsi, le **résultat** final de la somme **ne doit jamais dépendre de l'indice de sommation**. Par exemple, l'égalité suivante n'a aucun sens.

$$\cancel{\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{57k+2}{100}}$$

Exemple 1.2 — Du symbole $\sum$ à l'expression développée.

$\sum$	Terme général	Indice 1^er terme	Indice der. terme	Somme avec les $\cdots$
$\sum_{k=1}^{4} k^2$				
$\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1+i}$				
$\sum_{j=1}^{n} \frac{10}{1+j^2}$				
$\sum_{\ell=2}^{2} \exp(\ell)$				
$\sum_{k=1}^{3} a_{2k+1}$				

On peut aussi rencontrer la notation

$$\sum_{i\in I} u_i$$

Cela désigne la sommes des éléments u_i, pour lesquels l'indice i appartient à I. Par exemple,

$$\sum_{i\in\{1,4,9\}} \sqrt{i} = \sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9} = 1+2+3 = 6$$

Exemple 1.3 — De l'expression développée au symbole $\sum$. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

$$1^2+2^2+\cdots+14^2+15^2 =$$

$$3+4+5+\cdots+n =$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} =$$

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{100} =$$

$$1+\exp(1)+\exp(2)+\cdots+\exp(n+1) =$$

$$2+4+6+\cdots+2n =$$

1.2 Les sommes de référence

Proposition 1.4 Dans la somme $\sum_{k=p}^{q} u_k$, il y a $q-p+1$ termes.

Proposition 1.5 — Somme d'une constante. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=p}^{q} a = a \times (\text{Nombre de termes}) = a \times (q-p+1).$$

Exemple 1.6 — Somme d'une constante.

$$\sum_{k=1}^{4} 2 =$$

$$\sum_{i=0}^{3} (-1) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} 0 =$$

Proposition 1.7 — Sommes des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que ces formules ont un sens pour $n = 1$ (voir pour $n = 2$). Par exemple, pour $n = 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \qquad \checkmark$$

De même, pour $n = 2$, on obtient,

$$\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{2(2+1)}{2} = 3 \qquad \checkmark$$

Exemple 1.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=1}^{6} k \quad =$$

$$\sum_{i=0}^{5} i^2 \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \quad =$$

Exemple 1.9 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Calculer la somme suivante.

$$\sum_{k=2}^{n} k$$

Proposition 1.10 — Sommes géométriques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$.

- Pour tout x un nombre réel ou complexe avec $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = x^p \times \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}$$

- Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \sum_{k=p}^{q} 1 = (q-p+1).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. On a, en remarquant un **télescopage**,

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=p}^{q} x^k &= (1-x)(x^p + x^{p+1} + \cdots + x^{q-1} + x^q) \\
&= x^p + \cancel{x^{p+1}} + \cdots + \cancel{x^{q-1}} + \cancel{x^q} - (\cancel{x^{p+1}} + \cancel{x^{p+2}} + \cdots + \cancel{x^q} + x^{q+1}) \\
&= x^p - x^{q+1} \\
&= x^p(1-x^{q+1-p})
\end{aligned}$$

D'où le résultat en divisant par $1-x$ des deux côtés. ■

Exemple 1.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes géométriques suivantes.

$$\sum_{k=0}^{10} 5^k =$$

$$\sum_{k=10}^{20} 2^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^k} =$$

Si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^{2i} =$

Proposition 1.12 — Factorisation de $a^n - b^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous nombres réels ou complexes a et b, on a,

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \end{aligned}$$

(Dans la somme, les puissances de a diminuent quand celle de b augmentent, et la somme des puissances $a^{\text{truc}}a^{\text{machin}}$ vaut toujours $n-1$.)

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux nombres réels ou complexes. On a,

$$\begin{aligned} &(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &\quad = a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cdots + \cancel{a^3b^{n-3}} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} \\ &\qquad - (\cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cdots + \cancel{a^3b^{n-3}} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} + b^n) \\ &\qquad = a^n - b^n \end{aligned}$$

en remarquant les termes qui se **télescopent**. ■

Exemple 1.13 Soient a, b, x trois nombres réels. Soit z un nombre complexe. Compléter les cases manquantes.

Valeur de n	Expression développée	Expression développée
	$a^2 - b^2$	
	$a^3 - b^3$	
		$(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
	$x^4 - 16$	
	$a^3 + b^3$	
	$z^3 + i$	

1.3 Techniques de calculs

1.3.a) Se ramener aux sommes de référence

Pour calculer des sommes, on peut se ramener aux sommes de référence en utilisant la linéarité de la somme, et en faisant attention aux indices.

Proposition 1.14 — Linéarité de la somme. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$. Soient $u_p, \ldots, u_q$ et $v_p, \ldots, v_q$ des nombres réels. On a

$$\sum_{k=p}^{q} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=p}^{q} v_k$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} (\lambda \cdot u_k) = \lambda \cdot \sum_{k=p}^{q} u_k$$

! Attention, la somme ne comporte mal avec la multiplication/division et les puissances. Par exemple, si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)^p \neq \sum_{k=0}^{n} u_k^p$$

Par exemple, on sait que $(u_1 + u_2)^2 \neq u_1^2 + u_2^2$.

Exemple 1.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$.

Si on reconnaît une somme de référence mais que l'indice ne commence par à 0 ou 1, on ajoute les termes qui manquent pour commencer à l'indice 0 puis on les retranche (pour conserver l'égalité).

Exemple 1.16 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Calculons $S_n = \sum_{\ell=3}^{n}(2\ell-1)$.

1.3.b) Sommes télescopiques

Les sommes de la forme

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})$$

sont appelées des *sommes télescopiques*. Il est facile de les calculer car les termes s'éliminent de proche en proche et il ne reste alors que le premier et le dernier terme.

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) =$$

Proposition 1.17 — Sommes télescopiques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \ldots, u_{q+1}$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{q+1} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

Exemple 1.18 Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{i=0}^{n}(i^2-(i+1)^2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

1.3.c) Changement d'indices

Il existe plusieurs façons d'écrire une même somme, par exemple

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}$$

Un changement d'indice est une réécriture de la somme avec un nouvel indice.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$\cdots$	$k=n$
$\frac{1}{k+1}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\cdots$	$i=n+1$
$\frac{1}{i}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$

Dans les deux cas, on conserve exactement les mêmes termes dans la somme, on leur donne juste «un nouveau nom». Cela permet notamment de se ramener à des sommes connues. De manière plus rigoureuse, on a effectué le changement d'indice «$i=k+1$».

Proposition 1.19 — Changement d'indice. Soient p et n deux entiers naturels. Soient $u_0,\ldots,u_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{i=p}^{n+p}u_{i-p}$$

Exemple 1.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes grâce à un changement d'indice.

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1), \qquad \sum_{k=0}^{n}(k+2)^2, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+3}}$$

1.3.d) Regroupement de termes

On peut parfois décomposer la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer.

Exemple 1.21 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $U_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$.

2 Produits

On souhaite de même que pour les sommes, avoir une écriture simplifiée et compacte pour la multiplication de nombreux termes.

2.1 Le symbole $\prod$

Définition 2.1 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ (p est l'indice de départ du produit, q l'indice de fin). Soient $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$ des nombres réels. Le *produit* de tous les termes $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$ se note :

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Cette notation se lit «le *produit* des u_k pour k variant de p à q». Par convention, si $p > q$ (produit vide), on considère que le produit vaut 1.

L'*indice du produit*, est une *lettre muette* :

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = \prod_{n=p}^{q} u_n = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Exemple 2.2 — Du symbole $\prod$ à l'expression développée.

$\prod$	Terme général	Indice 1er terme	Indice der. terme	Produit avec les $\cdots$
$\prod_{k=1}^{n} 3$				
$\prod_{\ell=3}^{5} \ell^2$				
$\prod_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$				
$\prod_{k=2}^{5} b_{10-k}$				

Exemple 2.3 — De l'expression développée au symbole $\prod$. On a

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$5^3 \times 6^3 \times 7^3 \times 8^3 =$$

Proposition 2.4 — Produit d'une constante. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\prod_{k=p}^{q} a = a^{\text{nbre de termes}} = a^{q-p+1}$$

Exemple 2.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les produits suivants.

$$\prod_{k=1}^{10} 2 =$$

$$\prod_{k=1}^{n} 1 =$$

$$\prod_{k=3}^{n} x =$$

2.2 Règles de manipulation

Proposition 2.6 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$. Soient $u_p, \ldots, u_q$ et $v_p, \ldots, v_q$ des nombres réels. On a

$$\prod_{k=p}^{q} (u_k \times v_k) = \prod_{k=p}^{q} u_k \times \prod_{k=p}^{q} v_k$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\prod_{k=p}^{q} (\lambda \cdot u_k) = \lambda^{q-p+1} \cdot \prod_{k=p}^{q} u_k$$

Exemple 2.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n} \frac{4^k}{2}$.

2.3 Technique de calculs

2.3.a) Produits télescopiques

Les produits de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

sont appelées des *produits télescopiques*. Il est facile de les calculer car les termes s'éliminent de proche en proche et il ne reste alors que le premier et le dernier terme.

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} =$$

Proposition 2.8 — Produits télescopiques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \dots, u_{q+1}$ des nombres réels. On a :

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p} \qquad \text{ou encore} \qquad \prod_{k=p}^{q} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_p}{u_{q+1}}$$

Exemple 2.9 On a

$$\prod_{k=2}^{7} \frac{k}{k+1} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} =$$

2.3.b) Changement d'indice

Comme pour les sommes, on peut effectuer des changements d'indice dans les produits.

Exemple 2.10 Effectuer dans les deux produits les changements d'indice respectivement données par $i = k-2$ et $j = k+1$

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} =$$

$$\prod_{k=0}^{12} \sqrt{k+1} =$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

3.1 Factorielle

Définition 3.1 La *factorielle* d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est l'entier

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 3.2 On a

$0!$	$1!$	$2!$	$3!$	$4!$

Proposition 3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Il faut faire très attention aux parenthèses avec les factorielles. En effet,

$$2(n!) =$$

alors que

$$(2n)! =$$

Exemple 3.4 On a

a) $5! =$

b) $\frac{7!}{5!} =$

c) $\frac{11!}{9!2!} =$

d) $\frac{13!-12!}{12!} =$

Exemple 3.5 Exprimer les produits suivants à l'aide de quantités factorielles.

a) $\prod_{k=4}^{n} k =$

b) $\prod_{k=1}^{n} (k+2) =$

Exemple 3.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$P_n = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n$$

Exprimer P_n d'une manière plus compacte, au moyen de factorielles.

3.2 Coefficients binomiaux

Proposition 3.7 Soient $n, k \in \mathbb{N}$. La quantité $\binom{n}{k}$, appelée **coefficient binomial** (qui se lit «k parmi n»), est définie par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par convention, cette quantité vaut 0 si $k > n$.

! Pour calculer un coefficient binomial, on peut écrire en extension les factorielles, puis faire le plus de simplifications possibles entre le numérateur et le dénominateur, et seulement enfin on effectue les multiplications restantes.

Exemple 3.8 En utilisant cette formule, on obtient :

$\binom{3}{2} =$

$\binom{5}{3} =$

Proposition 3.9 — Cas particuliers à connaître. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

? Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être vu comme le nombre de sous-groupes de k personnes que l'on peut faire parmi un groupe de n personnes.

- $\binom{n}{n} = 1$ car on ne peut faire qu'un seul sous-groupe de n personnes parmi un groupe de n personnes
- $\binom{n}{1} = n$ car on peut faire n sous-groupes de une personne parmi un groupe de n personnes

On a l'habitude de représenter les coefficients binomiaux dans un tableau, avec l'entier n en ligne et l'entier k en colonne. Ainsi, la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la n-ième ligne et k-ième colonne. Pour remplir les cases de ce tableau, on utilise la **formule de Pascal** qui permet de déduire une ligne de la précédente.

Proposition 3.10 — Formule de Pascal. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Exemple 3.11 Sur le tableau, on peut lire les valeurs suivantes :

$$\binom{5}{2} = \qquad \binom{3}{2} = \qquad \binom{4}{3} =$$

On remarque une symétrie dans le tableau, donnée par la formule suivante.

Proposition 3.12 — Symétrie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemple 3.13 Calculer $\binom{10}{8}$.

3.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 3.14 — Formule du binôme de Newton. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

(Les coefficients binomiaux apparaissant dans la formule sont ceux correspondant à la ligne n du tableau du triangle de Pascal. De plus, les puissances de b augmentent quand celles de a diminuent, et la somme des puissances vaut toujours n.)

Exemple 3.15 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer les expressions données.

Exemple	Coeff. Bin. associés	Développement
$(a+b)^2$		
$(a+b)^3$		
$(a-b)^3$		
$(a+b)^4$		
$(a-b)^5$		
$(z+i)^3$		

Exemple 3.16 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(2x+1)^3$.

Exemple 3.17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(x-3)^3$.

Exercice 3.18 — Autour de la loi binomiale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On pose,

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \qquad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

4 Sommes doubles

4.1 Sommes "rectangulaires"

On veut calculer la somme de tous les nombres $a_{i,j}$ présents dans le tableau suivant :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$

Il s'agit en fait de calculer une somme de somme, que l'on appelle *somme double*. Cette somme est notée

$$S = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} a_{i,j}.$$

On peut sommer de deux manières différentes.

- On somme les éléments par *ligne* :
$$S = (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}) = \sum_{i=1}^{2} (a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3}) = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \right)$$
- On somme les éléments par *colonne* :
$$S = (a_{1,1} + a_{2,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2}) + (a_{1,3} + a_{2,3}) = \sum_{j=1}^{3} (a_{1,j} + a_{2,j}) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{i,j} \right)$$

Proposition 4.1 Soient $(m,p,n,q)\in\mathbb{N}^4$ et $(a_{i,j})_{m\leqslant i\leqslant n, p\leqslant j\leqslant q}$ des nombres réels. On a

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}\right)$$

Exemple 4.2 Calculer

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}} \frac{1}{i+j} \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i.$$

4.2 Sommes "triangulaires"

On peut aussi vouloir calculer la somme de tous les nombres $a_{i,j}$ présents dans le tableau suivant, dont toutes les cases ne sont pas remplies :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$i=3$			$a_{3,3}$

Il s'agit en fait de calculer la somme suivante

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3} a_{i,j}.$$

On peut sommer de deux manières différentes.

- On somme les éléments par *ligne* :
$$S = (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,2} + a_{2,3}) + (a_{3,3}) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=i}^{3} a_{i,j} \right)$$

- On somme les éléments par *colonne* :
$$S = (a_{1,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2}) + (a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3}) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

Proposition 4.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ des nombres réels. Alors,

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right)$$

Exemple 4.4 Calculons

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i.$$

4.3 Produit de deux sommes finies

Le calcul de deux sommes finies peut se ramener au calcul d'une somme double de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) &= (a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_m)\\ &= a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_mb_{n-1}+a_mb_n\\ &= \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_i\times b_j\end{aligned}$$

En «lisant cette égalité à l'envers», on voit aussi qu'une somme double d'un produit peut se ramener au calcul d'un produit de deux sommes simples.

Exemple 4.5 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer

$$S=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} ij$$