Interrogation du 29/09/2026

NOM Prénom :

1. Soit $n \geq 4$. Calculer les sommes suivantes.

   a) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

   c) $S_3 = \sum_{k=4}^{n} k^2$ d) $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$

   On fera la **vérification** pour au moins l'une des formules données.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{S_1} &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1 \times (n-1+1) \\ &= n(n+1) - n \\ &\boxed{= n^2}\end{aligned}$$

   Vérification : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 \qquad \text{tandis que} \qquad n^2 = 1 \qquad \checkmark$$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\boxed{S_2} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \boxed{= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

   Soit $n \geq 4$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{S_3} &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 14 \\ &\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 14}\end{aligned}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant un télescopage, on a,

$$\boxed{S_4} = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{n+3} \boxed{= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}}$$

Tournez la page ➔

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \ldots, u_{q+1}$ des nombres réels. Donner la formule pour calculer une somme télescopique.

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{q+1}}$$

3. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Donner les formules pour les quatre sommes de référence suivantes.

a) $\boxed{\sum_{k=p}^{q} a = a \times (q-p+1)}$

b) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

c) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

d) $\boxed{\sum_{k=p}^{q} x^k = x^p \times \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}}$

4. <u>*Bonus (hors barême)*</u> : Écrire le nombre A suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$)

$$A = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

On a,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2-(3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2)}{3-2} \\
&= 4\sqrt{3}\sqrt{2} \\
&= 4\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{A = 4\sqrt{6}}$$