Interrogation du 13/10/2026

NOM Prénom :

1. Démontrer la formule de **linéarisation** suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^3(x) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$$

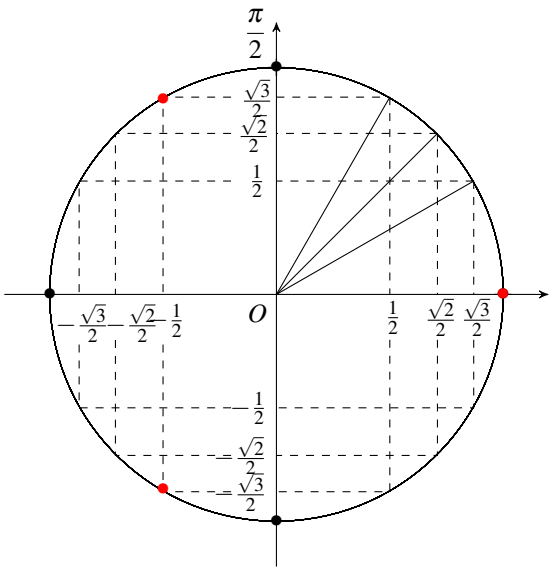
On détaillera bien tous les calculs.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\cos^3(x)} &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 && \textit{[Formules d'Euler vers les exponentielles]} \\
&= \frac{1}{8}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right] && \textit{[Binôme de Newton]} \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right] && \textit{[Simplifications]} \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right] && \textit{[Regroupement des termes conjugués]} \\
&= \frac{1}{8}\left[2\cos(3x) + 6\cos(x)\right] && \textit{[Formules d'Euler vers les } \cos \textit{ et } \sin\textit{]} \\
&\boxed{= \frac{1}{4}\left[\cos(3x) + 3\cos(x)\right]}
\end{aligned}$$

Tournez la page ➔

2. Dans cette question, on s'intéresse aux racines 3-ième de l'unité.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine 3-ième de l'unité. Par définition, de quelle équation est-elle solution ?
   Par définition, z vérifie l'équation
   $$\boxed{z^3 = 1}$$
   (b) Donner les racines 3-ième de l'unité sous forme trigonométrique.
   D'après un théorème du cours, les racines 3-ième de l'unité sont données par
   $$\boxed{1, \quad e^{i\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{4i\pi}{3}}}$$
   (c) Donner les racines 3-ième de l'unité sous forme algébrique.
   Sous forme algébrique, on obtient,
   $$\boxed{1, \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
   (d) Placer les racines 3-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



3. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z_1 = 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$.
   On a,
   $$\begin{aligned} z_1 &= 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \boxed{1+i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z_2 = 2+2i$.
   On a,
   $$\begin{aligned} z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \boxed{2\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$