DS 1

Correction

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Recopier et compléter la définition d'une fonction paire donnée ci-dessous.

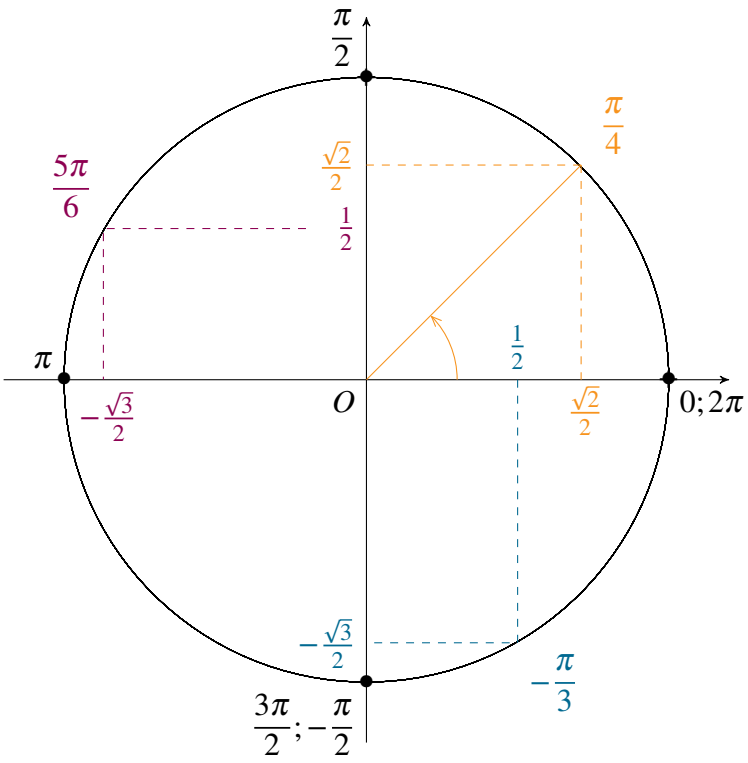
   Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est une fonction paire si

   - *son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro*
   - *et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.*

2. Tracer sur votre copie un cercle trigonométrique, puis y placer les angles

   $$\frac{\pi}{4}, \qquad -\frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{5\pi}{6}$$

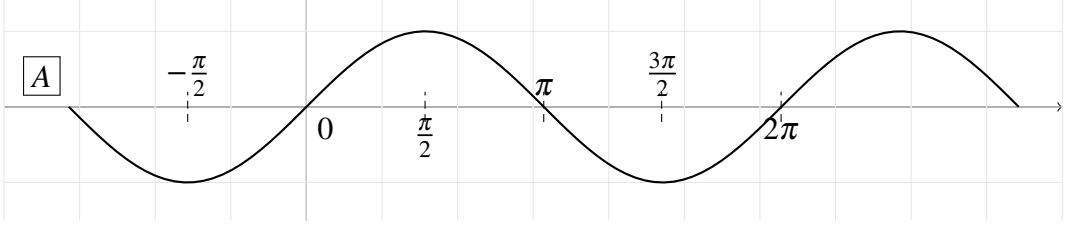
   en indiquant les valeurs de cosinus et sinus associées pour chaque angle.

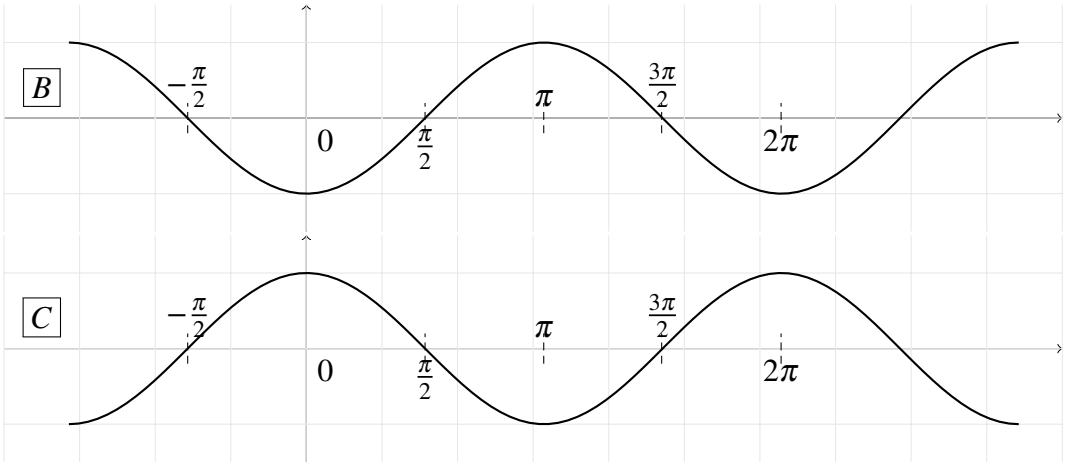


3. Pour chacune des trois fonctions suivantes

   a) $f_1 : x \mapsto \cos(x+\pi)$ b) $f_2 : x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ c) $f_3 : x \mapsto -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

   reconnaître sa courbe représentative parmi les propositions ci-dessous. *Justifier.*





On peut remarquer que $f_1(0) = -1$, donc la seule courbe valable pour f_1 est la B.
De même, la courbe de f_2 est la C et la courbe de f_3 est la A.

Exercice 2 – Adapté d'un sujet de concours de la banque PT. On considère les fonctions ϕ et ψ, qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \; ; \qquad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction ϕ est $\mathbb{R}$.

   On peut remarquer que l'équation $x^2 + 12 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ n'admet aucune solution réelle. Donc, le domaine de définition de ϕ est $\boxed{\mathbb{R}.}$

2. Calculer $\phi(\frac{1}{2})$ et $\psi(\frac{1}{2})$.

   On peut calculer que

$$\begin{aligned}
\boxed{\phi\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{12 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{12 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{12 - \frac{5}{4}}{12 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{\frac{43}{4}}{\frac{49}{4}} \\
&\boxed{= \frac{43}{49}}
\end{aligned}$$

   On montre de même que

$$\boxed{\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{43}{49}}$$

3. Étudier la parité de la fonction ϕ.

   Tout d'abord, le domaine de définition de ϕ, qui est $\mathbb{R}$ (car le polynôme $x \mapsto x^2 + 12$ ne s'annule jamais), est symétrique par rapport à 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(-x) = \frac{12 - 5(-x)^2}{12 + (-x)^2} = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} = \phi(x)$$

   Donc, la fonction $\boxed{\phi \text{ est paire.}}$

4. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude de la fonction ϕ, et pour sa courbe représentative ?

   D'après la question précédente, la fonction φ est paire. On en déduit

   - qu'il suffit $\boxed{\text{d'étudier la fonction sur } [0; +\infty[}$ (et on peut en déduire le comportement de ϕ sur $]-\infty, 0[$ par symétrie)
   - et sa courbe représentative sera $\boxed{\text{symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.}}$

5. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\psi(x)} &= 1 - \frac{6x^2}{12+x^2} \\ &= \frac{12+x^2-6x^2}{12+x^2} \\ &= \frac{12-5x^2}{12+x^2} \\ &\boxed{= \phi(x)}\end{aligned}$$

6. Déterminer pour tout réel x la valeur de $\phi'(x)$.

   Tout d'abord, la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Puis, on peut calculer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x)} = \psi'(x) = -\frac{12x(12+x^2) - 6x^2(2x)}{(12+x^2)^2} \boxed{= \frac{-144x}{(12+x^2)^2}}$$

7. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$. *On admet que*

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = -5 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 5$$

   On vient de calculer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) = \frac{-144x}{(12+x^2)^2}$$

   On a donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	-5	↗	1	↘	-5

8. Résoudre l'équation $\phi(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\phi(x) = 0 &\iff 12 - 5x^2 = 0 \\ &\iff x^2 = \frac{12}{5} \\ &\iff x = \sqrt{\frac{12}{5}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{12}{5}} \\ &\iff x = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x = -2\sqrt{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $\phi(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet deux solutions qui valent

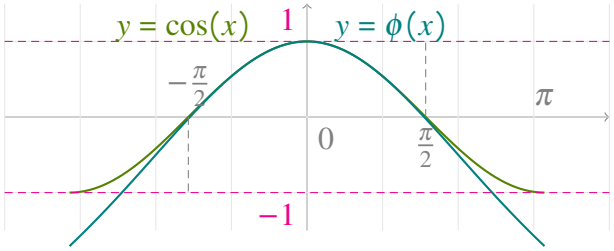
$$\boxed{2\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \text{et} \qquad -2\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

9. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?

On obtient la figure suivante.



On remarque que les deux courbes sont très $\boxed{\text{proches au voisinage de 0.}}$

10. La fonction ϕ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

D'après le tableau de variations, la fonction ϕ est $\boxed{\text{majorée par 1}}$ et $\boxed{\text{minorée par } -5}$, elle est donc $\boxed{\text{bornée.}}$

11. On définit la fonction f par

$$f : x \mapsto \frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}$$

On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Que vaut $\mathcal{D}_f$?

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\iff 3 - 3x \geq 0 \text{ et } x + 5 \geq 0 \text{ et } x + 5 \neq 0 \\ &\iff x \leq 1 \text{ et } x \geq -5 \text{ et } x \neq -5 \\ &\iff x \in]-5, 1] \end{aligned}$$

On en déduit que le domaine de définition de f vaut

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-5, 1]}$$

12. Montrer que

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \qquad \phi(f(x)) = x$$

Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\phi(f(x))} &= \phi\left(\frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}\right) \\
&= \frac{12 - 5 \times \left(\frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}\right)^2}{12 + \left(\frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}\right)^2} \\
&= \frac{12 - 5 \times \frac{4(3-3x)}{x+5}}{12 + \frac{4(3-3x)}{x+5}} \\
&= \frac{\frac{12(x+5)-20(3-3x)}{x+5}}{\frac{12(x+5)+4(3-3x)}{x+5}} \\
&= \frac{12(x+5) - 20(3-3x)}{12(x+5) + 4(3-3x)} \\
&= \frac{12x + 60 - 60 + 60x}{12x + 60 + 12 - 12x} \\
&= \frac{72x}{72} \\
&\boxed{= x}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 3 – Soit $\theta = \frac{\pi}{5}$. Le but de cet exercice est principalement de déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 1 : Quelques questions intermédiaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de duplication, on a directement que

   $$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1}$$

   (b) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

   $$\begin{aligned}
   \boxed{\cos(3x)} &= \cos(2x + x) \\
   &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) && \text{(formule d'addition)} \\
   &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)\sin(x) && \text{(formules de duplication)} \\
   &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) \\
   &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x)) && \text{(relation fondamentale)} \\
   &\boxed{= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}
   \end{aligned}$$

   (c) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. En suivant le même raisonnement qu'à la question précédente, on a,

   $$\begin{aligned}
   \boxed{\sin(3x)} &= \sin(2x + x) \\
   &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) && \text{(formule d'addition)} \\
   &= 2\cos(x)\sin(x)\cos(x) + (1 - 2\sin^2(x))\sin(x) && \text{(formules de duplication)} \\
   &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\
   &= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) && \text{(relation fondamentale)} \\
   &\boxed{= -4\sin^3(x) + 3\sin(x)}
   \end{aligned}$$

Partie 2 : Première méthode

2. Calculer $\cos(2025 \times \theta)$.

   On peut remarquer que

   $$2025\theta = 2025 \times \frac{\pi}{5} = 405\pi = 202 \times 2\pi + \pi$$

Ainsi, par 2π-périodicité du cosinus, on obtient,

$$\boxed{\cos(2025\times\theta)} = \cos(202\times 2\pi+\pi) = \cos(\pi) \boxed{= -1}$$

3. Justifier que $\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$ et que $\cos(4\theta) = -\cos(\theta)$.

On peut remarquer que

$$3\theta = \frac{3\pi}{5} = \pi - 2\theta$$

Ainsi, par formule de symétrie, on a,

$$\boxed{\cos(3\theta)} = \cos(\pi-2\theta) \boxed{= -\cos(2\theta)}$$

De même,

$$\boxed{\cos(4\theta)} = \cos(\pi-\theta) \boxed{= -\cos(\theta)}$$

4. En déduire, grâce à la première partie, une équation vérifiée par $\cos(\theta)$.

D'après la question précédente, on sait que

$$\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$$

En utilisant les formules obtenues aux questions 1(a) et 1(b), on obtient,

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = -(2\cos^2(\theta)-1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{4\cos^3(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 3\cos(\theta) - 1 = 0}$$

5. Justifier que

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R}, \qquad 4x^3+2x^2-3x-1 = (x+1)(4x^2-2x-1)$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a, en développant,

$$\boxed{(x+1)(4x^2-2x-1)} = 4x^3-2x^2-x+4x^2-2x-1$$
$$\boxed{= 4x^3+2x^2-3x-1}$$

6. En déduire que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

D'après la question (4), $\cos(\theta)$ est une solution de l'équation

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

Or, en utilisant la question précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0 & \\ \iff & \quad (x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 0 \\ \iff & \quad x + 1 = 0 \text{ ou } 4x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \iff & \quad x = -1 \text{ ou } 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, on reconnait une équation de second degré. On calcule son discriminant qui vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles qui sont

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

et

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

Ainsi,

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \iff \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos(\theta)$ est une solution de cette équation, on a,

$$\cos(\theta) = -1 \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

Or, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\theta) \in]0, 1[$, donc nécessairement

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}$$

(car les deux autres solutions sont négatives).

7. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

D'après la relation fondamentale,

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2(\theta) \\ &= 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= 1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Or, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\theta) > 0$, donc nécessairement,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$$

(car $\sqrt{5} < 5$)

8. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   Par définition de la fonction tangente et en utilisant les deux questions précédentes, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{4}{1+\sqrt{5}} \\ &\boxed{= \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}}\end{aligned}$$

Partie 3 : Deuxième méthode

9. Résoudre l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\boxed{\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \equiv 0\,[\pi] \quad \boxed{\Leftrightarrow \quad x \equiv 0\,[2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = k2\pi}$$

10. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$(2\cos(\varphi) + 1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. On a,

$$\boxed{(2\cos(\varphi)+1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\cos(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= \sin(\varphi + \frac{\varphi}{2}) + \sin(\varphi - \frac{\varphi}{2}) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ (formule pour le produit sin/cos)}$$
$$= \sin(\frac{3\varphi}{2}) + \sin(-\frac{\varphi}{2}) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= \sin(\frac{3\varphi}{2}) - \sin(\frac{\varphi}{2}) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \text{(par imparité du sinus)}$$
$$\boxed{= \sin(\frac{3\varphi}{2})}$$

11. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in]0, 2\pi[$, on a

$$\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in]0, 2\pi[$. On a,

$$\boxed{\cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = \cos(a+\varphi)(2\cos(\varphi)+1) \qquad \text{(en utilisant la question précédente)}$$
$$= 2\cos(a+\varphi)\cos(\varphi) + \cos(a+\varphi)$$
$$= \cos(a+\varphi-\varphi) + \cos(a+\varphi+\varphi) + \cos(a+\varphi) \text{ (formule pour le produit)}$$
$$\boxed{= \cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi)}$$

12. En prenant $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$, montrer que $\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}$.

En utilisant la relation précédente avec $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$, on trouve

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) = \cos(3\theta)\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$$

Or,

$$\cos(5\theta) = \cos(\pi) = -1$$

et

$$\cos(3\theta)\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(6\theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{\sin(\pi+\theta)}{2\sin(\theta)} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) - 1 = -\frac{1}{2}$$

et donc

$$\boxed{\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}}$$

13. Justifier que

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}{2}$$

D'après la formule pour le produit cos/cos (déjà utilisée plus fois précédement), on a,

$$\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta)} = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta-3\theta)+\cos(\theta+3\theta)\right) \boxed{= \frac{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}{2}}$$

en ayant utilisé la parité du cosinus.

14. A l'aide de la question 3., en déduire que $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.

On vient de montrer que

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}{2}$$

Or d'après la question 3,

$$\cos(3\theta) = -\cos(2\theta) \text{ et que } \cos(4\theta) = -\cos(\theta)$$

Donc en remplaçant, on obtient,

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{-\cos(\theta)-\cos(3\theta)}{2} = -\frac{\cos(\theta)+\cos(3\theta)}{2}$$

Or d'après la question 12, on a,

$$\cos(\theta)+\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$$

Donc,

$$\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}}$$

15. Déduire des questions précédentes une équation du second degré vérifiée par $\cos(\theta)$.

D'après la question 12, on a,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} - \cos(3\theta)$$

Or d'après la question 14, on a,

$$\cos(3\theta) = -\frac{1}{4\cos(\theta)}$$

En combinant les deux, on obtient,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cos(\theta)}$$

Après calculs, on obtient,

$$8\cos^2(\theta) - 4\cos(\theta) - 2 = 0$$

Ainsi, $\cos(\theta)$ est une solution de l'équation de second degré

$$8x^2 - 4x - 2 = 0$$

16. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

D'après la question précédente, $\cos(\theta)$ est une solution de l'équation de second degré

$$8x^2 - 4x - 2 = 0$$

Or (après calculs du discriminant), cette équation admet deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos\theta > 0$, nécessairement,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$