DM 2

À rendre pour le lundi 3 novembre 2026 (facultatif)

Exercice 1 – Un petit pivot de Gauss. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Faire apparaître la **vérification** sur votre copie.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système linéaire grâce à la **méthode du pivot de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -3y - 4z = 2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -2z = 4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ z = -2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2) \end{matrix}$$

Ce système linéaire admet donc une unique solution, donnée par le triplet $(1,2,-2)$.

Vérification. Le triplet $(1,2,-2)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2\times(-2) = -1 & \checkmark \\ 2\times 1 - 2 + 2\times(-2) = -4 & \checkmark \\ 4\times 1 + 2 + 4\times(-2) = -2 & \checkmark \end{cases}$$

Exercice 2 – L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$$

1. Rappeler l'expression des fonctions ch et sh.

   On a,

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

   $$\begin{aligned} \boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)} &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &\boxed{= 1} \end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction $k : x \longmapsto 2\mathrm{sh}(x) + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer. *On admet que*

   $$\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$$

   - L'ensemble $\mathbb{R}$ est un **intervalle**.
   - La fonction k est **continue** sur $\mathbb{R}$.
   - De plus, k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont e

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k'(x) = 2\mathrm{ch}(x) > 0$$

   On en déduit que k est une fonction **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

   D'après le **théorème de la bijection**, k réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $k(\mathbb{R})$. Comme

   $$\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$$

   on en déduit que $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi,

   $$\boxed{\text{la fonction } k \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4. Justifier que l'équation $2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α.*

   D'après la question précédente, la fonction k réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \ \exists! x \in \mathbb{R},\ \ y = k(x)$$

   En particulier, comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel α tel que $0 = k(\alpha)$, c'est-à-dire que

   $\boxed{\text{l'équation } 2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}.}$

5. En déduire le tableau de signe de la fonction $k : x \longmapsto 2\mathrm{sh}(x) + 1$.

   La fonction k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cf Question 3) et s'annule uniquement en α d'après la question précédente. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	

6. Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{3}{4}$$

Par construction, on sait que

$$2\mathrm{sh}(\alpha) + 1 = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{sh}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(\alpha)} = [\mathrm{ch}(\alpha)]^2 + \mathrm{sh}(\alpha)$$
$$= 1 + [\mathrm{sh}(\alpha)]^2 + \mathrm{sh}(\alpha) \quad \text{d'après la relation fonda entre sh et ch (cf Question 2)}$$
$$= 1 + [-\frac{1}{2}]^2 + \frac{1}{2} \quad \text{car par construction } \mathrm{sh}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$
$$\boxed{= \frac{3}{4}}$$

7. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions qui le sont

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(x)(2\,\mathrm{sh}(x) + 1)$$

En utilisant le tableau de signe de la fonction k (cf Question 5) et comme la fonction c est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de signe suivant pour f' et donc le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$		$+$		$+$	
$2\mathrm{sh}(x)+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en α valant $\frac{3}{4} \geq 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq \frac{3}{4}$$

Et donc en particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq 0}$$

9. Tracer la courbe représentative de f. *On admet que* $\alpha \approx -0.48$.
10. La fonction f est-elle admet-elle un minimum ? un maximum ?

D'après le tableau de variations, la fonction f admet un $\boxed{\text{minimum en } \alpha \text{ valant } \frac{3}{4} \geq 0}$.

Cependant, la fonction f n'admet $\boxed{\text{pas de maximum}}$ par exemple car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 – Un peu de Python.... Sans l'aide de l'ordinateur, donner l'affichage des programmes Python suivants.

1. Programme 1

```
a = 1
b = 6
a = 2*b-1
b = 2*a
a = a -2
print(a)
print(b)
```

   Le programme affiche $\boxed{9}$ puis $\boxed{22}$

2. Programme 2

```
L = [4,5, [1,3]]
x = L[1]
print(x+2)
L.append(-1)
print(len(L))
L[2]=0
print(L+[0,1,2])
```

   Le programme affiche $\boxed{7}$ puis $\boxed{4}$ puis $\boxed{[4,5,0,-1,0,1,2]}$

3. Programme 3

```
c = 0
for i in range(4):
    c=c+2*i
    print(c)
print(c)
```

   Le programme affiche $\boxed{0}$ puis $\boxed{2}$ puis $\boxed{6}$ puis $\boxed{12}$ puis $\boxed{12}$.