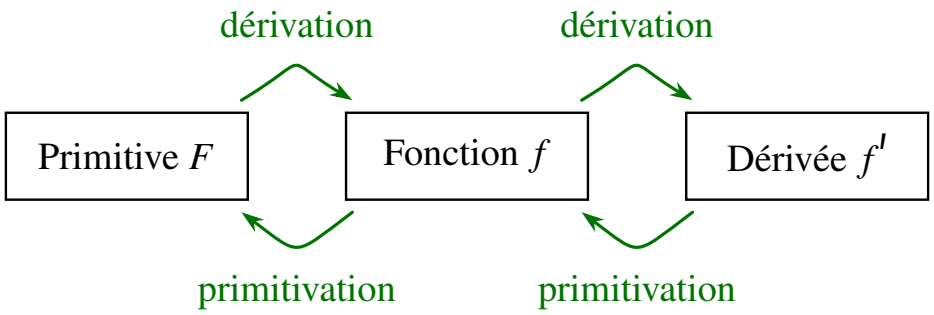
9. Calcul d'une primitive



Pour bien démarrer : savoir «remonter» l'opération de dérivation

$\mathcal{D}_f$	Fonction f	$\mathcal{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	$x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
Dépend de α	$x \mapsto x^\alpha$	Dépend de α	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$]0,+\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto 1+\tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$
$[-1,1]$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1,1]$	$x \mapsto \arccos(x)$	$]-1,1[$	$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition de la notion de primitive

Définition 1.1 Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $F : I \to \mathbb{K}$ est une **primitive de f sur I** si
① F est dérivable sur I
② Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Exemple 1.2 Montrons que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

① La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions usuelles.
② De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Exemple 1.3 Montrons que les fonctions $F_1 : x \mapsto x^2$ et $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ sont des primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

① Les fonctions F_1 et F_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales.

② De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a,

$$F_1'(x) = 2x = f(x) \qquad \text{et} \qquad F_2'(x) = 2x + 0 = f(x)$$

Donc F_1 et F_2 sont bien des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2 Existence et non unicité

Proposition 2.1 — Existence d'une primitive. Toute fonction **continue** sur un **intervalle** admet au moins une **primitive** sur cet intervalle.

Il faut se placer sur un intervalle (un ensemble de $\mathbb{R}$ «sans trou») pour éviter les problèmes. En effet, si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est donc pas un intervalle) par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x},$$

alors,

- sur $]0, +\infty[$, f admet pour primitive $x \mapsto \ln(x)$,
- sur $]-\infty, 0[$, f admet pour primitive $x \mapsto \ln(-x)$.

On peut alors remarquer que l'expression de la primitive donnée n'est pas la même sur tout l'ensemble de définition de f.

Grâce à l'Exemple 1.3, on remarque qu'une même fonction peut admettre plusieurs primitives. Toutefois, ces primitives ne diffèrent que d'une constante. Ainsi, on ne dit jamais «la primitive» mais toujours «une primitive» car il en existe une *infinité* (il suffit d'ajouter une constante pour obtenir une nouvelle primitive).

Proposition 2.2 — Infinité de primitives. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

- Deux primitives F_1 et F_2 de f sur I sont égales à une **constante près**,
$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F_1(x) = F_2(x) + c.$$
- Autrement dit, si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est donné par
$$\{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 2.3 L'ensemble des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\{x \mapsto x\ln(x) - x + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2.4 — Unicité sous condition. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors, pour tous $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exercice 2.5 Donner l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 2.6 On admet que la fonction $F : x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{9}\ln(-3x + 2)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{3x-2}$ sur $I =]-\infty, \frac{2}{3}[$. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit G la primitive de f sur I qui s'annule en 0. On sait qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in I, \qquad G(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9}\ln(-3x + 2) + C$$
Or, on sait aussi que $G(0) = 0$. Donc,
$$0 = \frac{0}{3} + \frac{2}{9}\ln(-3 \times 0 + 2) + C \qquad \text{d'où} \qquad C = -\frac{2}{9}\ln(2)$$
Ainsi,
$$\forall x \in I, \qquad G(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9}\ln(-3x + 2) - \frac{2}{9}\ln(2)$$

- *Synthèse.* On définit la fonction G par

$$\begin{array}{rccc} G: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{3}+\frac{2}{9}\ln(-3x+2)-\frac{2}{9}\ln(2) \end{array}$$

On vérifie que
  - G est dérivable sur I,
  - pour tout $x \in I$, $G'(x) = f(x)$,
  - et $G(0) = 0$.

Ainsi, la fonction G est la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

3 Calcul de primitive

3.1 Primitives des fonctions usuelles

On ne précise pas ici l'ensemble de définition de la fonction, ni de sa primitive.

Fonction	Une primitive
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$ $^{(*)}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto \exp(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a}\exp(ax)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x)-x$
$x \mapsto \cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax)$
$x \mapsto \sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax)$

Fonction	Une primitive
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$x \mapsto 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arccos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$

$^{(*)}$ Cette formule fonctionne pour les puissances positives et négatives et aussi pour la racine carrée.

Exemple 3.1

Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$

Proposition 3.2 Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $F, G : I \to \mathbb{K}$ telles que F soit une primitive de f sur I et G soit une primitive de g sur I. Alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I.

Démonstration. (...) ■

Grâce à la *linéarité* de la notion de primitive et à partir des primitives des fonctions usuelles, on peut alors trouver des primitives de fonctions plus compliquées.

Exemple 3.3

Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto \mathrm{ch}(x) - 5$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x) - 5x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 - 5x + 3$	$x \mapsto x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) - \frac{2}{x}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{-2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-2x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(3x) + \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x) + \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$	$x \mapsto \arcsin(x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	$]-1, 1[$

3.2 Reconnaître la dérivée d'une composée

Proposition 3.4 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $u : I \to J$ une fonction dérivable sur I et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dont une primitive est notée F. Alors une primitive de $x \mapsto u'(x)f(u(x))$ sur I est $x \mapsto F(u(x))$.

Démonstration. (...) ■

Les formes les plus courantes de dérivées de composées sont les suivantes.

Fonction	Une primitive
$u'\exp(u)$	$\exp(u)$
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

Fonction	Une primitive
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

⚠ On ne sait pas primitiver directement des fonctions de la fonction $x \mapsto [u(x)]^n$, $x \mapsto \exp(u(x))$, etc. Il nous faut le «terme dérivé $u'(x)$» en facteur de ces quantités. Parfois, on est amené à forcer son apparition.

Exemple 3.5

Fonction	Forme	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto 2x\exp(x^2)$	$u'\exp(u)$	$x \mapsto \exp(x^2)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$	$\frac{u'}{u}$	$x \mapsto \ln(\lvert 1+x^2\rvert)$ soit $x \mapsto \ln(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 3(3x-5)^4$	$u'u^4$	$x \mapsto \frac{1}{5}(3x-5)^5$	$\mathbb{R}$

Exemple 3.6 Déterminer un primitive de chacune des fonctions suivantes et indiquer sur quel(s) intervalle(s) la formule est valable.

a) $x \mapsto \frac{1}{1+(2x)^2}$ b) $x \mapsto \frac{1}{3x+1}$ c) $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$

Fonction	«Forçage»	Forme	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto \frac{1}{1+(2x)^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\frac{2}{1+(2x)^2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{u'}{1+u^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(2x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{3x+1}$	$x \mapsto \frac{1}{3}\frac{3}{3x+1}$	$\frac{1}{3} \times \frac{u'}{u}$	$x \mapsto \frac{1}{3}\ln(\lvert 3x+1 \rvert)$	$]-\infty,-\frac{1}{3}[$ et $]-\frac{1}{3},+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$	$x \mapsto -\frac{-1}{(1-x)^2}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$

3.3 Primitive d'une fraction rationnelle simple

Pour déterminer la primitive d'une fraction rationnelle de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

il faut commencer par factoriser le dénominateur, qui est un polynôme du second degré. Cette factorisation dépend du signe du discriminant Δ du polynôme $x \mapsto ax^2+bx+c$.

a) Cas $\Delta = 0$ (le dénominateur admet une racine double)

Lorsque $\Delta = 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2+bx+c$ admet une unique racine que l'on peut noter x_0. Dans ce cas là, le polynôme peut se factoriser sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}-\{x_0\}, \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}}$$

On peut primitiver directement sur $]-\infty,x_0[$ et sur $]x_0,+\infty[$ en reconnaissant une forme composée usuelle :

$$\boxed{\frac{u'}{u^2} = u'u^{-2} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{u}}$$

Exemple 3.7 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4x^2+4x+1}$ sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$.

On peut remarquer directement que (identité remarquable ou en passant par le calcul des racines grâce au discriminant),

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\tfrac{1}{2},+\infty[, \qquad f(x) &= \frac{1}{4x^2+4x+1} \\
&= \frac{1}{(2x+1)^2} \qquad \text{(factorisation)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{(2x+1)^2} \qquad \text{(reconnaissant der. comp. avec forçage)} \\
&= \frac{1}{2} \times \left[2(2x+1)^{-2}\right] \qquad \text{(reconnaissant der. comp. avec forçage)}
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive F de la fonction f sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ est donnée par

$$\forall x \in]-\tfrac{1}{2},+\infty[, \qquad F(x) = \frac{1}{2} \times \left[-(2x+1)^{-1}\right] = -\frac{1}{2(2x+1)}$$

b) Cas $\Delta > 0$ (le dénominateur admet deux racines réelles distinctes)

Lorsque $\Delta > 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes que l'on peut noter x_1 et x_2. Dans ce cas là, le polynôme peut se factoriser sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}, \qquad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Pour primitiver une telle fonction, il faut effectuer une *décomposition en éléments simples*. On trouve deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}, \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\lambda_1}{x - x_1} + \frac{\lambda_2}{x - x_2}}$$

On peut primitiver directement sur $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ et sur $]x_2, +\infty[$ en reconnaissant une somme de deux formes composées usuelles :

$$\boxed{\frac{u'}{u} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \ln(|u|)}$$

Exemple 3.8 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$.

On peut remarquer que,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1+x)} && \text{(factorisation)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} && \text{(décomposition en elemt simples)} \\
&= -\frac{1}{2} \times \left[\frac{-1}{1-x}\right] + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{1+x}\right] && \text{(reconnaissant der. comp. avec forçage)}
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive F de la fonction f sur $]-1, 1[$ est donnée par

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = -\frac{1}{2} \times [\ln(|1-x|)] + \frac{1}{2} \times [\ln(|1+x|)] \quad = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

c) Cas $\Delta < 0$ (le dénominateur n'admet pas de racines réelles)

Lorsque $\Delta < 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racines réelles (mais admet deux racines complexes) Dans ce cas là, le polynôme peut se mettre sous la forme canonique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d$$

Alors, la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+d}}$$

À quelques changements près, on peut se reconnaître une forme composée usuelle

$$\boxed{\frac{u'}{1+u^2} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \arctan(u)}$$

Exemple 3.9 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$.

On peut remarquer que,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) &= \frac{1}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2+1} && \text{(sous forme canonique)} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2+1} && \text{(reconnaissant der. comp. avec forçage)}\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \arctan(x+1)$$

3.4 Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

Pour primitiver une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$, on remarque que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{ax}\cos(bx) = \operatorname{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right)}$$

Puis, on calcule une primitive de la fonction exponentielle (complexe) et on en prend sa partie réelle.

Exemple 3.10 Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

On commence par remarquer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)$$

Ainsi, une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{2} \times e^x \times (\cos(x)+i\sin(x))\right) \\ &= \frac{e^x}{2}\operatorname{Re}\left((1-i)\times(\cos(x)+i\sin(x))\right) \\ &= \frac{e^x}{2}\operatorname{Re}\left(\cos(x)+\sin(x)+i(\sin(x)-\cos(x))\right) \\ &= \frac{e^x}{2}\times(\cos(x)+\sin(x))\end{aligned}$$

Pour primitiver une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, on remarque que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{ax}\sin(bx) = \operatorname{Im}\left(e^{(a+ib)x}\right)}$$

Puis, on calcule une primitive de la fonction exponentielle (complexe) et on en prend sa partie imaginaire.