TD 05 – Sommes, Produits, Coeff. Binomiaux

1 Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\cdots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

1) $\sum_{k=1}^{20} k^3$ 2) $\sum_{\ell=2}^{8} \exp(\ell+1)$

3) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$ 4) $\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1)$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

1) $1+2^6+3^6+4^6+\cdots+(n+1)^6$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné)

2) $2+4+6+8+\cdots+50$

3) $1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{100}$ (pour un $a \in \mathbb{R}^*$ donné)

Exercice 3 – Somme d'une constante. Soient $n,p,q \in \mathbb{N}^*$ avec $p<q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=1}^{10} 3$ 4) $\sum_{i=1}^{n} 1$

2) $\sum_{j=n}^{n+10} 1$ 5) $\sum_{\ell=0}^{21} 5$

3) $\sum_{k=p}^{q} (-1)$ 6) $\sum_{k=1}^{n} x$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=1}^{6} k$ 4) $\sum_{\ell=1}^{10} \ell^2$

2) $\sum_{j=1}^{n-1} j$ 5) $\sum_{k=0}^{6} k$

3) $\sum_{k=1}^{n+1} k$ 6) $\sum_{k=1}^{n^2} k^2$

Exercice 5 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 5$. Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$ avec $p<q$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=3}^{12} k$ 3) $\sum_{j=100}^{200} j$

2) $\sum_{k=5}^{n} k^2$ 4) $\sum_{k=p}^{q} k$

Exercice 6 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

1) $\sum_{k=1}^{n} (5k)$ 3) $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)$

2) $\sum_{k=0}^{n} (k-10)$ 4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2}$

Exercice 7 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ 3) $\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

2) $\sum_{k=1}^{n} 4^k$ 4) $\sum_{k=0}^{n} 1^k$

Exercice 8 – Sommes géométriques un peu cachée.... On rappelle les règles suivantes sur les puissances : pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$, $p,q \in \mathbb{N}$,

$$x^{p+q} = x^p \times x^q \qquad \frac{1}{y^q} = \left(\frac{1}{y}\right)^q$$

$$\frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p \qquad x^{p\times q} = (x^p)^q = (x^q)^p$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ 3) $\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3}$

2) $\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k}$ 4) $\sum_{k=1}^{n} 2^{2k}$

Exercice 9 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

1) $2+4+6+\cdots+100$
2) $1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n$
3) $1+3+5\cdots+99$
4) $2\times 5^2+2\times 5^3+\cdots+2\times 5^{2n+2}$

Exercice 10 – Somme télescopique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, on a
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 11 – Sommes télescopiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

1) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ 2) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Exercice 12 – Changements d'indices. À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

a) $\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \sum_{i=\cdots}^{\cdots} \frac{i}{i-1}$

b) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{k=1}^{\cdots} \cdots$

c) $\sum_{i=2}^{n} (i-2) = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} k$

2 Produits

Exercice 13 – Calculer les produits suivants. *On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qu'il se passe.*

1) $\prod_{k=0}^{n} 2$ 3) $\prod_{\ell=1}^{n-1} 2^\ell$ 5) $\prod_{k=0}^{n-1} k^2$ 7) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

2) $\prod_{k=1}^{4} x$ 4) $\prod_{i=1}^{n} (-1)^i$ 6) $\prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k}$ 8) $\prod_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2k+3}$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 14 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

a. $\binom{7}{0}$ b. $\binom{8}{8}$ c. $\binom{25}{1}$

d. $\binom{25}{2}$ e. $\binom{25}{23}$ f. $\binom{10}{6}$

Exercice 15 – Soit $n \geqslant 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n.

a. $\binom{n}{1}$ b. $\binom{n}{2}$ c. $\binom{n}{3}$

Exercice 16 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

1) $5\times6\times7\times8\times9$, 3) $2\times4\times6\times\cdots\times(2n)$

2) $n(n-1)(n-2)$ 4) $1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$

Exercice 17 – Trouver un moyen *efficace* pour calculer les nombres suivants.

a. $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}$ b. $\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$

Exercice 18 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

a. $\frac{n!}{(n+1)!}$ b. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

c. $\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ d. $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$

Exercice 19 – Développement. Soient $x,a,b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes

a. $(a+b)^6$ b. $(2-x)^5$

c. $(2x+1)^4$ d. $(x^2+2)^3$

Exercice 20 – Calcul de somme.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ 2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ 3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Exercice 21 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

1) $\prod_{j=1}^{n-1} j^2$ 2) $\prod_{k=4}^{n} k^3$

4 Sommes doubles

Exercice 22 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i+j)$

b) $V = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j$

c) $W = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x^{i+j}$ (pour un $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$)

5 Approfondissement

Exercice 23 –

1. Déterminer les réels a,b,c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 24 – Oral MP 2018 Centrale.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n+1-p}$$

2. En déduire que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$$