TD 09 – Calcul d'une primitive

Exercice 1 – Primitive des fonctions usuelles. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto 5$
2. $x \mapsto 3x^2$
3. $x \mapsto \frac{1}{x}$
4. $x \mapsto \mathrm{e}^x$
5. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
7. $x \mapsto 2x$
8. $x \mapsto \frac{1}{x^4}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $x \mapsto \cos(2x)$
11. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
12. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Exercice 2 – Primitive de sommes de fonctions usuelles. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto x^2 - 3x + 5$
2. $x \mapsto 1 + \tan^2(x) + \mathrm{e}^{2x}$
3. $x \mapsto \sin(2x) + 1$
4. $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x} + x^3$
5. $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{ch}(x)$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$
7. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
8. $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$
11. $x \mapsto \dfrac{1}{x} + x^2$
12. $x \mapsto 2\cos(2x) + \sin(x)$

Exercice 3 – Primitive des formes usuelles (sans forçage). Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto 2x\cos(x^2)$
2. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
3. $x \mapsto (x+1)^4$
4. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$
5. $x \mapsto -\sin(x)\exp(\cos(x))$
6. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^4}$
7. $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$
8. $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$

Exercice 4 – Donner *l'ensemble* des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{(x^4+1)^3}$$

Exercice 5 – Primitive des formes usuelles (avec forçage). Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$
2. $x \mapsto x\cos(x^2)$
3. $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$
5. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$
6. $x \mapsto \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{x-4}$
8. $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}$
9. $x \mapsto (2x^2-3)^2$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$
11. $x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$
12. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$

Exercice 6 – Primitive avec condition. Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f sur l'intervalle donné telle que $F(x_0) = y_0$.

a) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} + 2x^4 - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{x}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 – Primitive avec condition. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en π des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$

c) $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Exercice 8 – Produit exponentielle avec cos/sin. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(3x)$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$

Exercice 9 – Primitive avec décomposition en éléments simples. On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$\forall x < 1, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
2. Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

3. En déduire une primitive de f sur $]-\infty, 1[$.
4. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 10 – Primitive d'une fraction rationnelle. On considère la fonction g définie sur $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$\forall x > \frac{1}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$$

1. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1$.
2. En déduire une primitive de g sur I.

Exercice 11 – Primitive et forme canonique. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

1. Mettre sous forme canonique le polynôme $x \mapsto x^2 - 2x + 2$
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 – Primitive avec décomposition en éléments simples. On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire une primitive de f sur $]0, 1[$.

Exercice 13 – Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est impaire, ses primitives sont-elles impaires ? paires ?
2. Si f est paire, ses primitives sont-elles paires ? impaires ?

Exercice 14 – CCINP, MP/MPI. Déterminer une primitive de

$$x \mapsto \cos^4(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$