10. Calcul Matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1 Les matrices

1.1 Définitions

Définition 1.1 — Matrice. On appelle **matrice** à n **lignes** et p **colonnes** (ou matrice de taille (n,p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ possédant n lignes et p colonnes, que l'on note de la forme

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, le **coefficient** d'indice (i,j), noté $a_{i,j}$, est le nombre (réel ou complexe) placé à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Exemple 1.2 On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Indiquer (si c'est possible) les coefficients suivants de la matrice.

$a_{1,3} = -1$ $\quad$ $a_{3,4} = 0$ $\quad$ $a_{4,3} =$ n'existe pas

$a_{3,1} = 9$ $\quad$ $a_{2,3} = 8$ $\quad$ $a_{1,1} = 2$

Exemple 1.3 Écrire en extension les deux matrices suivantes :

$$A = (i+j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}} \quad \text{et} \quad B = ((-1)^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.4 — Ensemble de matrices.

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes (matrices carrées).
- Une matrice colonne est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.
- Une matrice ligne est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

Exemple 1.5 Pour les matrices suivantes, donner le nombre de lignes, de colonnes, et l'ensemble auquel elles appartiennent.

Matrice	Nbre Lignes	Nbre Colonnes	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	3	2	$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$
$B = \begin{pmatrix} 6i & 3 \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$	2	2	$B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$
$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1	3	$C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ (matrice ligne)
$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$	2	1	$D \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (matrice colonne)

Définition 1.6 — Égalité de deux matrices. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \ \ a_{i,j} = b_{i,j}$$

Autrement dit, deux matrices sont **égales** si elles ont le même nombre de lignes, de colonnes, et les mêmes coefficients aux mêmes places.

Exemple 1.7 Pour quelle·s valeur·s de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les deux matrices suivantes sont-elles égales ?

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A = B \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x+y=2 \\ 0=0 \\ x-y=4 \\ 0=0 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x+y=2 \\ -2y=2 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

1.2 Matrices particulières

Définition 1.8 — Matrice nulle & Matrice Identité.

- La matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** et notée $0_{n,p}$ (ou simplement 0_n lorsque $n = p$).
- La matrice carrée de taille (n,n) contenant des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs est appelée **matrice identité de taille** n et notée I_n.

Exemple 1.9 Les matrices $0_{2,3}$ et I_3 sont données respectivement par,

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de matrices

Définition 2.1 — Addition de deux matrices. Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $A+B$ comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Autrement dit, pour **sommer** deux matrices *de même taille*, on fait la *somme terme à terme* des coefficients.

Exemple 2.2 On considère les deux matrices A et B, données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $A+B$.

On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3 — Règles de calculs pour l'addition.
Soient A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors,

- $A + B = B + A$ ⇝ l'addition est **commutative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ ⇝ l'addition est **associative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ ⇝ $0_{n,p}$ est un **élément neutre** pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Les règles de calcul pour l'addition de matrices sont donc analogues à ceux de l'addition de nombres réels.

2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition 2.4 — Produit d'une matrice par un nombre réel. Pour $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $\lambda \cdot A$ (ou λA) comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$\lambda \times a_{i,j}$$

Autrement dit, pour **multiplier** une matrice **par un nombre réel**, on fait la *mutiplication de tous les coefficients* par ce nombre réel. Par convention, on note toujours le scalaire à gauche de la matrice.

Exemple 2.5 On considère la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $0 \cdot A, 1 \cdot A, 2 \cdot A$ et $(-1) \cdot A$.

On a

$$0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Les règles de calcul pour la multiplication par un scalaire sont analogues à ceux avec les nombres.

Proposition 2.6 — Règles de calculs pour la multiplication par un scalaire.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha \times \beta)A = \alpha(\beta A)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Exemple 2.7 Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $4A + 3M = -10A$. Exprimer A en fonction de M.

On sait que

$$\begin{aligned} & 4A + 3M = -10A \\ \text{donc} \quad & 14A = -3M \\ \text{donc} \quad & A = -\tfrac{3}{14}M \end{aligned}$$

2.3 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Jusque là, les calculs se passent de manière comparable aux calculs sur les nombres réels. Attention, pour la multiplication de deux matrices, cela se complique.

Définition 2.8 Soient

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

Alors

$$LC = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Ce produit n'existe que si le nombre de colonne de L est égal au nombre de ligne de C.

Exemple 2.9 Calculer les produits matriciels suivants.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\times 1+2\times 1+3\times 1 = 6$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\6\\4\\3\end{pmatrix} = 1\times(-1)+0\times 6+-(3)\times 4+4\times 3 = -1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix} = 1\times 1+2\times 2+\cdots+n\times n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.4 Produit de deux matrices

Définition 2.10 Pour $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, on définit le **produit** AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dont pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,p]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$L_i(A)C_j(B) = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}$$

où $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(B)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Attention à la taille des matrices. Pour pouvoir calculer le produit AB, il faut que le nombre de **colonnes** de la matrice A soit égale au nombre de **lignes** de matrice B. On a alors

$$(\text{matrice } n\times m)\cdot(\text{matrice } m\times p) = \text{matrice } n\times p$$

Exemple 2.11 On considère les deux matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les matrices AB et BA.

- Comme le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B, le produit AB est possible et doit donner une matrice 2×2.

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 10\\5 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 10\\5 & 5\end{pmatrix}$$

- Comme le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice A, le produit BA est possible et doit donner une matrice 2×2.

$$BA=\begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21 & 14\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21 & 14\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 2.12 On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 6\\1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les matrices AB et BA.

- Comme le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B, on ne peut pas effectuer le produit AB.

- Par contre, comme le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, on peut effectuer le produit BA, et il vaut

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

L'exemple précédent illustre le fait que le produit matriciel diffère du produit sur les nombres réels car il n'est pas **commutatif**.

- Lorsqu'il est possible de calculer le produit AB, le produit BA n'est pas forcément défini.
- Lorsque les deux produits AB et BA sont définis, en général,

$$AB \neq BA$$

Proposition 2.13 — Règles de calcul pour le produit. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(AB)C = A(BC)$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$

Exemple 2.14 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B+C$ puis $A(B+C)$.
2. Calculer AB et AC puis $AB+AC$.
3. Vérifier que $A(B+C) = AB+AC$.

1. On a

$$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, on a

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad AB+AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.15 On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A \cdot I_2$ et $I_3 \cdot A$. Que remarque-t-on ?

On a

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A$$

On a

$$I_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A$$

De manière générale, comme l'illustre l'exemple précédent, on peut en déduire les règles de calculs suivantes concernant le produit par la matrice identité ou par la matrice nulle.

Proposition 2.16 — Règles de calcul avec les matrices identités/nulles. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a

- $A \cdot I_p = I_n \cdot A = A$
- $A \cdot 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{m,n} \cdot A = 0_{m,p}$

L'égalité $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Ainsi, si on obtient que $AB = 0$, on ne conclura pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Et on ne simplifiera pas par A dans une égalité du type $AB = AC$ sans hypothèse supplémentaire sur A. Par exemple, si on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,3}$$

tandis que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Exemple 2.17 — Calcul littéral matriciel. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer les deux premières expressions, factoriser à droite par A la troisième et factoriser à gauche par A la dernière.

$$\begin{aligned} (A+B)\cdot(A-B) &= A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B \\ (2A+B)\cdot(3A) &= 6A\cdot A + 3B\cdot A \\ A\cdot A + BA &= (A+B)\cdot A \\ A\cdot A + AB + A &= A\cdot(A+B+I_n) \end{aligned}$$

2.5 Analogies entre calcul réel et calcul matriciel

Soient $n, p, q, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.

Monde des matrices	Monde des réels
$A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A$	$x + 0 = 0 + x = 0$
$A \cdot 0_{p,q} = 0_{p,q}$ et $0_{m,n} \cdot A = 0_{m,p}$	$x \times 0 = 0 \times x = 0$
$0_{n,p}$	0
$A \cdot I_p = I_n \cdot A = A$	$x \times 1 = 1 \times x$
I_n	1

2.6 Transposition

Définition 2.18 — Transposition d'une matrice. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la **transposée** de la matrice A, notée $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par $a_{j,i}$. De manière informelle, effectuer la transposée revient à faire "la symétrie par rapport à la diagonale".

Exemple 2.19 Donner la transposée des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

Proposition 2.20 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$\bullet (A^\top)^\top = A$ $\quad \bullet (A+B)^\top = A^\top + B^\top$ $\quad \bullet (\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$ $\quad \bullet (AB)^\top = B^\top A^\top$

Exemple 2.21 On considère les deux matrices A et B, données par,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- D'une part, calculer AB, puis $(AB)^\top$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (AB)^\top = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

- D'autre part, calculer $A^\top$, $B^\top$ puis $B^\top A^\top$.

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad B^\top A^\top = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

2.7 Vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Définition 2.22 Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on définit les matrices-colonnes/vecteurs $E_1, E_2, \ldots, E_n$ par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces n matrices-colonnes/vecteurs sont appelés **vecteurs de la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.23 Donner les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Les *trois* vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exemple 2.24 Effectuer les produits matriciels suivants.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Proposition 2.25 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$.

1. Le produit AE_j donne la j-ième colonne de A.
2. Le produit $E_i^\top A$ donne la i-ième ligne de A.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A, on a

$$\begin{aligned} AX &= A(x_1 E_1 + \cdots + x_p E_p) \\ &= x_1 AE_1 + \cdots + x_p AE_p \\ &= x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p \end{aligned}$$

Autrement dit, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

2.8 Matrices élémentaires et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2.26 Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients (dans $\mathbb{K}$) sont nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Ces matrices sont appelées **matrices élémentaires de** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.27 Donner les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.28 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit de deux matrices élémentaires vaut :

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \qquad \text{où } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2.29 Effectuer les produits matriciels suivants.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,3}E_{2,2} = \delta_{3,2}E_{1,2} = 0E_{1,2} = 0_3$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,2}E_{2,1} = \delta_{2,2}E_{2,1} = 1E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 2.30 Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire de matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Montrons que A est une combinaison linéaires des matrices élémentaire de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. On a,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{1,3}E_{1,3} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2} + a_{2,3}E_{2,3}$$

■

3 Matrices carrées

Lorsque l'on considère des matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme $A+B$ reste dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les produits AB et BA sont définis et sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se place donc, pour cette section, dans le cadre où toutes les matrices sont **carrées** et de **même taille**. Ainsi, on n'a plus besoin de se préoccuper du nombre de lignes et de colonnes pour des produits entre matrices.

3.1 Puissances d'une matrice carrée

Définition 3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Par convention, on a $A^0 = I_n$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la **puissance** p**-ième** de de la matrice A, notée A^p est définie par

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}.$$

Les règles de calculs pour les puissances de matrices sont les mêmes que pour les nombres réels.

Proposition 3.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$A^{p+q} = A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p \qquad \text{et} \qquad A^{pq} = (A^p)^q = (A^q)^p$$

Exemple 3.3 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** On demande une formule pour n'importe quelle puissance de A. On commence par calculer les petites puissances de A. Puis on conjecture une formule générale que l'on démontre par récurrence.

- Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_2$.
- Pour $p = 1$, on a $A^1 = A$.
- pour $p = 2$, on a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $p = 3$, on a

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour cela, notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(p) : \text{« } A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ »}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Comme $A^0 = I_2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathbb{P}(p)$ est vraie.

Définition 3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est **nilpotente** d'ordre p si $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$.

Exemple 3.5 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** On commence par calculer les petites puissances de A. Puis on conjecture une formule générale que l'on démontre par récurrence.

- Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_3$.
- Pour $p = 1$, on a $A^1 = A$.
- pour $p = 2$, on a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- pour $p = 3$, on a

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Donc, par *récurrence*, on montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, $A^p = 0_3$. Ainsi, A est une matrice nilpotente d'ordre 3.

Définition 3.6 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 3.7 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors,

$$(AB)^p = A^p B^p$$

Proposition 3.8 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent** et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 3.9 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour calculer les puissances de A, on peut aussi décomposer la matrice en une somme de deux matrices dont les puissances sont faciles à calculer (ex : matrices diagonales, niloptentes), qui commutent et ainsi utiliser le binôme de Newton.

On peut commencer par remarquer que

$$A = I_3 + N \qquad \text{avec} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec I_3 la matrice identité de taille 3 (matrice diagonale !) telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_3^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} = I_3$$

et N une matrice nilpotente car

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 3, \ N^k = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les matrices I_3 et N commutent, d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= (I_3+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \\
&= \binom{p}{0} N^0 + \binom{p}{1} N^1 + \binom{p}{2} N^2 \\
&= 1 \times I_3 + p \times N + \tfrac{p(p-1)}{2} \times N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2p & 3p \\ 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2p(p-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2p & 3p+2p^2-2p \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2p & p(2p+1) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 3.10 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si $A^\top = A$, c'est-à-dire si, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que A est **antisymétrique** si $A^\top = -A$, c'est-à-dire si, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. (Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls).

Exemple 3.11 Dire si les matrices suivantes sont symétriques, antisymétriques ou ni l'un ni l'autre.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & \pi \\ -3 & \pi & -11 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -\pi \\ -3 & \pi & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -\pi \\ -3 & \pi & -11 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \notin \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

Proposition 3.12 La somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.

Démonstration. Soient S_1 et S_2 deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. On a,

$$(S_1+S_2)^\top = S_1^\top + S_2^\top = S_1 + S_2$$

D'où le résultat. ■

⚠ En revanche, en général, le produit de deux matrices symétriques n'est pas en général une matrice symétrique. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \quad \text{mais} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

3.3 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 3.13

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- La matrice A est **diagonale** lorsque $\forall i \neq j, a_{ij} = 0$. Autrement dit, une matrice diagonale est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \qquad \text{avec } d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}.$$

  En particulier, toutes les matrices λI_n (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) sont diagonales. Elles sont appelées **matrices scalaires**.

- La matrice A est **triangulaire inférieure** lorsque $\forall i < j$, $a_{ij} = 0$. Autrement dit, une matrice triangulaire inférieure est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n,1} & \cdots & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } t_{1,1}, \dots, t_{n,n} \in \mathbb{K}.$$

- La matrice A est **triangulaire supérieure** lorsque $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$. Autrement dit, une matrice triangulaire supérieure est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } t_{1,1}, \dots, t_{n,n} \in \mathbb{K}.$$

Exemple 3.14 Pour les matrices suivantes, dire lesquelles sont diagonales, triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures.

Matrice	Diagonale	Triangulaire supérieure	Triangulaire inférieure
$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Non	Oui	Non
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	Non	Non	Oui
$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	Oui	Oui	Oui
$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$	Non	Non	Non

Proposition 3.15 Soient A et B deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda A, A+B$ et AB sont des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures).

Exemple 3.16 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB.

En effectuant le produit matriciel, on obtient,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

4 Matrices inversibles

4.1 Définition

Définition 4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice A est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.

Dans ce cas,
- la matrice B est unique,
- on a en fait $AB = I_n$ et $BA = I_n$,
- B s'appelle la **matrice inverse** de A, on la note A^{-1}.

Exemple 4.2 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc, la matrice A est inversible et son inverse vaut $A^{-1} = B$.

Si on trouve une relation entre les puissances de A, on peut essayer de faire apparaître, en factorisant, une relation de la forme $AB = I_n$. On en déduit alors l'inversibilité de A et son inverse.

Exemple 4.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - 3A - 2I_n = 0_n.$$

Montrons que A est inversible, c'est-à-dire cherchons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_n$.

On a

$$\begin{aligned} & A^3 - 3A - 2I_n = 0_n \\ \text{donc} \quad & A^3 - 3A = 2I_n \\ \text{donc} \quad & \tfrac{1}{2}\left(A^3 - 3A\right) = I_n \\ \text{donc} \quad & A \times \tfrac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right) = I_n \end{aligned}$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)$.

Proposition 4.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**. Alors,

- $AB = AC \iff B = C$ ($\times$ à gauche par A^{-1})
- $AB = C \iff B = A^{-1}C$ ($\times$ à gauche par A^{-1})
- $BA = CA \iff B = C$ ($\times$ à droite par A^{-1})
- $BA = C \iff B = CA^{-1}$ ($\times$ à droite par A^{-1})

Toutes ses équivalences deviennent fausses si la matrice A n'est pas inversible (attention aux simplifications abusives).

Exemple 4.5 Soient A, D deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

On sait que

$$\begin{array}{lll} & D = P^{-1}AP & \\ \text{donc} & PD = PP^{-1}AP & \times \text{ à gauche par } P \\ \text{donc} & PD = I_2AP & \\ \text{donc} & PD = AP & \\ \text{donc} & PDP^{-1} = APP^{-1} & \times \text{ à droite par } P^{-1} \\ \text{donc} & PDP^{-1} = A & \end{array}$$

Exemple 4.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 3I_n$, qui vérifie $A^2 = 3A$. Montrons, par l'absurde, que A n'est pas inversible.

Supposons par l'absurde que A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Alors, on a

$$\begin{array}{lll} & A^2 = 3A & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc} & A \cdot A = 3 \cdot A & \\ \text{donc} & A \cdot A \cdot A^{-1} = 3A \cdot A^{-1} & \text{en multipliant à droite par } A^{-1} \\ \text{donc} & A \cdot I_n = 3 \cdot I_n & \text{car } A \cdot A^{-1} = I_n \\ \text{donc} & A = 3 \cdot I_n & \end{array}$$

Or, la dernière égalité est absurde. Donc, cela démontre que la matrice A n'est pas inversible.

Proposition 4.7 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices inversibles.

1. Alors, A^{-1} est inversible et
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
2. Alors, AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
3. Alors $A^\top$ est inversible et
$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$$
4. Alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

Preuve de 2). Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices inversibles. On a

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Donc la matrice AB est inversible et son inverse vaut $B^{-1}A^{-1}$. ■

4.2 Cas particuliers à connaître

Proposition 4.8 — Matrice nulle et identité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La matrice identité I_n est inversible et $(I_n)^{-1} = I_n$.
2. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Proposition 4.9 — Cas des matrices 2×2. Soient a,b,c,d des réels et

$$A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Alors, la matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)=ad-bc\neq 0$ et dans ce cas, Et dans ce cas,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$

Exemple 4.10 On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible.

La matrice A est de taille 2×2. On a $\det(A)=2\times 4-3\times 1=5\neq 0$. Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Vérification.✓

Exemple 4.11 On considère la matrice

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

Montrons que B n'est pas inversible.

La matrice B est de taille 2×2. On a $\det(A)=2\times 2-4\times 1=0$. Donc B n'est pas inversible.

Proposition 4.12 — Matrices diagonales. Une matrice **diagonale** $D=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \ d_i\neq 0$$

Dans ce cas, son inverse est

$$D^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1},\dots,\frac{1}{d_n}\right)$$

Exemple 4.13 Soit $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$. Déterminer si la matrice D est inversible.

La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc D est inversible et son inverse est

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$$

Proposition 4.14 — Matrices triangulaires. Une matrice **triangulaire** supérieure (resp. inférieure) T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \ t_i\neq 0$$

Dans ce cas, l'inverse de T est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont les $1/t_{i,i}$ (mais on ne connaît pas la valeur des coefficients extra-diagonaux).

Exemple 4.15 Soit $T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Déterminer si la matrice T est inversible.

La matrice T est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc T est inversible et T^{-1} est de la forme

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & \frac{1}{2} & c\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad\text{avec } (a,b,c)\in\mathbb{K}^3.$$

L'argument « tous les coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice est inversible » n'est valable que pour les matrices diagonales ou triangulaires. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a tous ses coefficients diagonaux non nuls pourtant elle n'est pas inversible car $\det(A) = 1 - 1 = 0$.