TD 05 – Sommes, Prod., Coeff. Binomiaux (Correction)

1 Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\cdots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

a) $\boxed{\sum_{k=1}^{20} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + 19^3 + 20^3}$

b) $\boxed{\sum_{\ell=2}^{8} \exp(\ell+1) = \exp(3) + \exp(4) + \cdots + \exp(8) + \exp(9)}$

c) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = -1 + 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + (-1)^n}$

d) $\boxed{\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1) = \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n)}$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

1) $\boxed{1+2^6+3^6+4^6+\cdots+(n+1)^6 = \sum_{k=1}^{n+1} k^6}$

2) $\boxed{2+4+6+8+\cdots+50 = \sum_{k=1}^{25} 2k}$

3) $\boxed{1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{100} = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k a^k}$

Exercice 3 – Somme d'une constante. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\boxed{\sum_{k=1}^{10} 3} = 3 \times (10 - 1 + 1) = 3 \times 10 \boxed{= 30}$

2) $\boxed{\sum_{j=n}^{n+10} 1} = 1 \times (n + 10 - n + 1) \boxed{= 11}$

3) $\boxed{\sum_{k=p}^{q} (-1)} = (-1) \times (q - p + 1) \boxed{= p - q - 1}$

4) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} 1} = 1 \times (n - 1 + 1) \boxed{= n}$

5) $\boxed{\sum_{\ell=0}^{21} 5} = 5 \times (21 - 0 + 1) = 5 \times 22 \boxed{= 110}$

6) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} x} = x \times (n - 1 + 1) \boxed{= nx}$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\boxed{\sum_{k=1}^{6} k} = \frac{6\times 7}{2} = 3\times 7 \boxed{= 21}$

2) $\boxed{\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}}$

3) $\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

4) $\boxed{\sum_{\ell=1}^{10} \ell^2} = \frac{10\times 11\times 21}{6} = 5\times 11\times 7 \boxed{= 385}$

5) $\boxed{\sum_{k=0}^{6} k} = \frac{6\times 7}{2} = 3\times 7 \boxed{= 21}$

6) $\boxed{\sum_{k=1}^{n^2} k^2 = \frac{n^2\times(n^2+1)\times(2n^2+1)}{6}}$

Exercice 5 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 5$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Calculer les sommes suivantes.

a) On a, en rajoutant/retranchant les termes qui manquant

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=3}^{12} k} &= 3+4+\cdots+12 \\
&= 1+2+3+4+\cdots+12-1-2 \\
&= \sum_{k=1}^{12} k-1-2 \\
&= \frac{12\times 13}{2}-3 \\
&= 6\times 13-3 \\
&\boxed{=75}
\end{aligned}$$

b) On a, en rajoutant/retranchant les termes qui manquant

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=5}^{n} k^2} &= 5+6+\cdots+n^2 \\
&= 1+2+3+4+5+6+\cdots+n^2-(1+2+3+4) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{4} k^2 \\
&\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-30}
\end{aligned}$$

c) De même,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{j=100}^{200} j} &= 100+101+\cdots+200 \\
&= 1+\cdots+99+100+101+\cdots+200-(1+\cdots+99) \\
&= \sum_{j=1}^{200} j-\sum_{j=1}^{99} j \\
&= \frac{200\times 201}{2}-\frac{99\times 100}{2} \\
&\boxed{=15150}
\end{aligned}$$

d) De même,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=p}^{q} k} &= p+p+1+\cdots+q \\
&= 1+\cdots+p-1+p+p+1+\cdots+q-(1+\cdots+p-1) \\
&= \sum_{k=1}^{q} k-\sum_{k=1}^{p-1} k \\
&\boxed{= \frac{q\times(q+1)}{2}-\frac{(p-1)\times p}{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 6 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

1) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (5k)} = 5 \sum_{k=1}^{n} k \boxed{= 5 \times \frac{n(n+1)}{2}}$

2) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (k-10)} = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 10 \boxed{= \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1)}$

3) $\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} 1 \boxed{= 2 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2}$

4) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \right) \boxed{= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)}$

Exercice 7 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k} = 2^0 \times \frac{1-2^{n-0+1}}{1-2} \boxed{= 2^{n+1} - 1}$

2) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 4^k} = 4^1 \times \frac{1-4^{n-1+1}}{1-4} \boxed{= -\frac{4}{3} \times (1 - 4^n)}$

3) $\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1-2+1}}{1-\frac{1}{2}} \boxed{= \frac{1}{2} \times \left(1 - (\frac{1}{2})^n\right)}$

4) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 1^k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1 \times (n - 0 + 1) \boxed{= n+1}$

Exercice 8 – Sommes géométriques un peu cachée.... Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les règles sur les puissances, calculer les sommes suivantes.

a) On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-1/3} \\
&\boxed{= \frac{3}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k}} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10-1+1}}{1-\frac{2}{3}} \\
&\boxed{= 2 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}
\end{aligned}$$

c) On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3}} &= \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \times 2^3 \\
&= 2^3 \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \\
&= 8 \times 2^2 \times \frac{1-2^{n+1-2+1}}{1-2} \\
&\boxed{= 32 \times (2^n - 1)}
\end{aligned}$$

d) On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2^{2k}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(2^2\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4^k \\
&= 4^1 \times \frac{1-4^{n-1+1}}{1-4} \\
&\boxed{= -\frac{4}{3}\left(1-4^n\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 9 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

a) On peut remarquer que

$$\boxed{2+4+6+\cdots+100} = \sum_{k=1}^{50}(2k) = 2\sum_{k=1}^{50}k = 2\times\frac{50\times 51}{2} \boxed{=2550}$$

b) On peut commencer par remarquer que

$$1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k$$

Ainsi,

- Si $x=-1$, on reconnaît la somme d'une constante,

$$\boxed{1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n} = \sum_{k=0}^{n}1^k\sum_{k=0}^{n}1 = 1\times(n-0+1)\boxed{=n+1}$$

- Si $x\neq -1$, on reconnaît une somme géométrique et alors,

$$\boxed{1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n} = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\boxed{=\tfrac{1-(-x)^n}{1+x}}$$

c) On a,

$$\boxed{1+3+5\cdots+99} = \sum_{k=0}^{49}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{49}k+\sum_{k=0}^{49}1 = 2\times\frac{49\times 50}{2}+1\times(49-0+1) = 50\times(49+1) = 50\times 50 \boxed{=2500}$$

d) On a,

$$\boxed{2\times 5^2+2\times 5^3+\cdots+2\times 5^{2n+2}} = \sum_{k=2}^{2n+2}2\times 5^k = 2\sum_{k=2}^{2n+2}5^k = 2\times 5^2\frac{1-5^{2n+1}}{1-5}\boxed{=\tfrac{25}{2}(5^{2n+1}-1)}$$

Exercice 10 – Somme télescopique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. En mettant au même dénominateur,

$$\boxed{\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} \boxed{= \tfrac{1}{x+1}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\boxed{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} && \text{en reconnaissant un télescopage} \\
&\boxed{= 1 - \tfrac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

Exercice 11 – Sommes télescopiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad\qquad 2)\ \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\tfrac{k}{k+1}\right)} &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1) \\
&= \ln(1) - \ln(n+1) \\
&\boxed{= -\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})(\sqrt{i}-\sqrt{i+1})} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{(i-(i+1))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} -(\sqrt{i}-\sqrt{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{i+1}-\sqrt{i} \\
&= \sqrt{n+1}-\sqrt{0} \\
&\boxed{= \sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

Exercice 12 – Changements d'indices. À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

a) On a,

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} \boxed{= \sum_{i=3}^{n+1} \frac{i}{i-1}}$$

b) On a,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^i} = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n \boxed{= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}}$$

c) On a,

$$\boxed{\sum_{i=2}^{n} (i-2)} = 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 2 \boxed{= \sum_{k=0}^{n-2} k}$$

2 Produits

Exercice 13 – Calculer les produits suivants. *On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qu'il se passe.*

a) $\boxed{\prod_{k=0}^{n} 2} = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-0+1} \boxed{= 2^{n+1}}$ (produit d'une constante)

b) $\boxed{\prod_{k=1}^{4}} x = x \times x \times x \times x \boxed{= x^4}$ (produit d'une constante)

c) $\boxed{\prod_{\ell=1}^{n-1} 2^{\ell}} = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-1} = 2^{1+2+\cdots+n-1} = 2^{\sum_{k=1}^{n-1} k} \boxed{= 2^{\frac{(n-1)n}{2}}}$

d) $\boxed{\prod_{i=1}^{n} (-1)^i = (-1)^n}$

e) $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} k^2} = 0 \times 1 \times \cdots \times (n-1) \boxed{= 0}$

f) $\boxed{\prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k}} = \frac{\cancel{14}}{13} \times \frac{\cancel{15}}{\cancel{14}} \times \cdots \times \frac{\cancel{56}}{\cancel{55}} \times \frac{57}{\cancel{56}} \boxed{= \frac{57}{13}}$ (par télescopage)

g) $\boxed{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} \boxed{= \frac{1}{n}}$ (par télescopage)

h) $\boxed{\prod_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2k+3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times \cdots \times \frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{2n+1}} \times \frac{\cancel{2n+1}}{2n+3} \boxed{= \frac{1}{2n+3}}$ (par télescopage)

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 14 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

a) $\boxed{\binom{7}{0} = 1}$ (valeur particulière)

b) $\boxed{\binom{8}{8} = 1}$ (valeur particulière)

c) $\boxed{\binom{25}{1} = 25}$ (valeur particulière)

d) $\boxed{\binom{25}{2}} = \frac{25!}{2!23!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{23}\times 24\times 25}{1\times 2\times\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{23}} = \frac{25\times 24}{2} = 25\times 12 \boxed{= 300}$

e) $\boxed{\binom{25}{23}} = \binom{25}{25-23} = \binom{25}{2} \boxed{= 300}$ (en utilisant les propriétés de symétrie et la question d))

f) $\boxed{\binom{10}{6}} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\times\cancel{8}\times 9\times 10}{1\times\cancel{2}\times 3\times\cancel{4}} = 7\times 3\times 10 \boxed{= 210}$

Exercice 15 – Soit $n \geqslant 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n.

a) $\boxed{\binom{n}{1}} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(n-1)}\times n}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(n-1)}} \boxed{= n}$ (c'est aussi une valeur particulière)

b) $\boxed{\binom{n}{2}} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(n-2)}\times(n-1)\times n}{2!\times\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(n-2)}} \boxed{= \frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

c) En faisant de même, $\boxed{\binom{n}{3} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}}$

Exercice 16 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

a) $\boxed{5\times 6\times 7\times 8\times 9} = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}{1\times 2\times 3\times 4}\ \boxed{=\frac{9!}{4!}}$

b) $\boxed{n(n-1)(n-2)} = \frac{1\times 2\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n}{1\times 2\times\cdots\times(n-3)}\ \boxed{=\frac{n!}{(n-3)!}}$

c) $\boxed{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n) = 2^n n!}$ (cf exemple de cours)

d) $\boxed{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times 2n\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\ \boxed{=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}$ en utilisant la réponse c)

Exercice 17 – Trouver un moyen *efficace* pour calculer les nombres suivants.

a) On a, en utilisant la **formule de Pascal**,

$$\boxed{\tbinom{8}{4}+\tbinom{8}{5}} = \binom{9}{5} \boxed{=126}$$

b) On a, en utilisant plusieurs fois la **formule de Pascal**,

$$\begin{aligned}\boxed{\tbinom{10}{3}+2\tbinom{10}{4}+\tbinom{10}{5}} &= \binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}\\ &= \binom{11}{4}+\binom{11}{5}\\ &= \binom{12}{5}\\ &= 8\times 9\times 11\\ &\boxed{=792}\end{aligned}$$

Exercice 18 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

a) $\boxed{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{n}}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{n}\times(n+1)}\ \boxed{=\frac{1}{n+1}}$

b) $\boxed{\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(2n-1)}\times(2n)\times(2n+1)}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cdots\times\cancel{(2n-1)}}\ \boxed{=(2n)(2n+1)}$

c) $\boxed{\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}} = \frac{(n+1)!}{n!1!}\times\frac{1!(n-1)!}{n!} = (n+1)\times\frac{1}{n}\ \boxed{=\frac{n+1}{n}}$

d) On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}} &= \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}} \\
&= \frac{n!}{p!\cancel{(n-p)!}}\times\frac{(p-1)!\cancel{(n-p)!}}{(n-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!}\times\frac{(p-1)!}{p!} \\
&= n\times\frac{1}{p} \\
&\boxed{=\frac{n}{p}}
\end{aligned}$$

Exercice 19 – Développement. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes.

Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. En appliquant la **formule du binôme de Newton**, on obtient,

a) $\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$

b) $\boxed{(2-x)^5 = 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5}$

c) $\boxed{(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1}$

d) $\boxed{(x^2+2)^3 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8}$

Exercice 20 – Calcul de somme.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a, en appliquant **le binôme de Newton**,
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} \boxed{= (x+1)^n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes
   a) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k} = (2+1)^n \boxed{= 3^n}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = 2$)
   b) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k} = (-1+2)^n = 0^n \boxed{= 0}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = -1$)
   c) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n \boxed{= 2^n}$ (en utilisant la formule précédente avec $x = 1$)

Exercice 21 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

a) $\boxed{\prod_{j=1}^{n-1} j^2} = 1^2 \times 2^2 \times \cdots \times (n-1)^2 = [1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)]^2 \boxed{= [(n-1)!]^2}$

b) $\boxed{\prod_{k=4}^{n} k^3} = 4^3 \times 4^3 \times \cdots \times n^3 = \frac{1^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times \cdots \times n^3}{1^3 \times 2^3 \times 3^3} = \frac{[1 \times \cdots \times n]^3}{[1 \times 2 \times 3]^3} \boxed{= \frac{n!^3}{3!^3}}$

4 Sommes doubles

Exercice 22 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i+j)$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{S} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} (i+j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} i + \sum_{j=1}^{p} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \times p + \frac{p(p+1)}{2} \right) \\
&= p \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{p(p+1)}{2} \\
&= p \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} \times (n-1+1) \\
&\boxed{= \tfrac{np}{2}(n+p+2)}
\end{aligned}$$

b) $V = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{V} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&\boxed{= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}
\end{aligned}$$

c) $W = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} x^{i+j}$ (pour un $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$)

<u>Soit $x \neq 1$.</u> On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{W} &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} x^i \times x^j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x^i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x^j\right) \\
&= \left(x^1 \times \frac{1-x^{n-1+1}}{1-x}\right) \times \left(x^1 \times \frac{1-x^{n-1+1}}{1-x}\right) \\
&\boxed{= \left(x \times \tfrac{1-x^n}{1-x}\right)^2}
\end{aligned}$$

5 Approfondissement

Exercice 23 –

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)} + \frac{bk(k+2)}{k(k+1)(k+2)} + \frac{ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{ak^2 + 3ak + 2a + bk^2 + 2bk + ck^2 + ck}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \ 1 = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a \\
&\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b+c = -\frac{1}{2} \\ 2b+c = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b+c = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \qquad\qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Pour calculer cette somme, on va faire apparaître deux sommes télescopiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right) \\
&\boxed{= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 24 – Oral MP 2018 Centrale.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n+1-p}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\prod_{p=0}^{n} p!} &= \prod_{p=1}^{n} p! \quad \text{car } 0! = 1 \\
&= \prod_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p} k\right) \quad \text{definition p!} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=k}^{n} k\right) \quad \text{interversion des deux produits} \\
&= \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} \quad \text{calcul du produit «à l'intérieur»} \\
&\boxed{= \prod_{p=1}^{n} p^{n+1-p}} \quad \text{renomage de la variable muette}
\end{aligned}$$

2. En déduire que, pour tout $n > 0$,

$$\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p}} &= \prod_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= n!^{n-1} \frac{1}{\prod_{p=0}^{n} p! \times \prod_{p=0}^{n} (n-p)!} \\
&= n!^{n-1} \frac{1}{\prod_{p=0}^{n} p! \times \prod_{p=0}^{n} p!} \\
&= n!^{n-1} \frac{1}{\left(\prod_{p=0}^{n} p!\right)^2} \\
&= n!^{n-1} \frac{1}{\left(\prod_{p=1}^{n} p^{n+1-p}\right)^2} \\
&= n!^{n-1} \prod_{p=1}^{n} p^{-2(n+1-p)} \\
&= \prod_{p=1}^{n} p^{n-1} \times \prod_{p=1}^{n} p^{-2(n+1-p)} \\
&\boxed{= \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}}
\end{aligned}$$