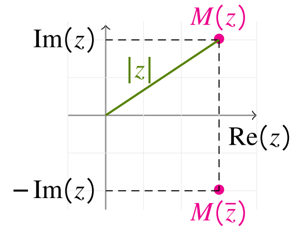
6. Nombres complexes : forme trigonométrique

Pour bien démarrer : Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- **Forme algébrique** : $z = a + ib$ avec a et b deux réels
- **Partie réelle** : $\mathrm{Re}(z) = a$
- **Partie imaginaire** : $\mathrm{Im}(z) = b$.
- **Conjugué** : $\overline{z} = a - ib$
- **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



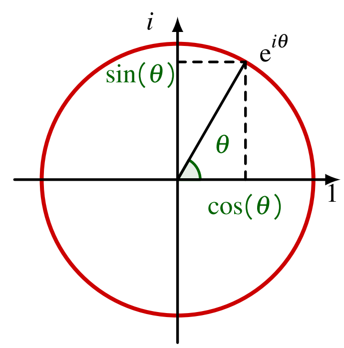
1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Nombres complexes de module 1

Définition 1.1 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Autrement dit, «$\mathrm{e}^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique associé à l'angle θ».



Exemple 1.2 Compléter le tableau suivant.

Forme algébrique	Forme trigonométrique
	e^{i0}
	$\mathrm{e}^{i\pi}$
$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	

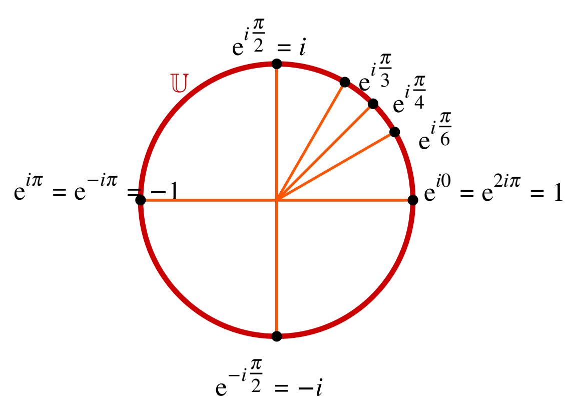
Exemple 1.3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Que vaut $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$? (On écrira le résultat sous forme trigonométrique).

Proposition 1.4 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$z \in \mathbb{U} \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| = 1.$$

Autrement dit, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points situés sur le cercle trigonométrique. De plus,

$$z \in \mathbb{U} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists \theta \in \mathbb{R}, \;\; z = \mathrm{e}^{i\theta}$$



Proposition 1.5 Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \qquad \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \;\; \theta = \theta' + 2k\pi$$

Exemple 1.6 Compléter le tableau suivant.

Forme algébrique	-1		i		$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	
Forme trigonométrique		$e^{2i\pi}$		$e^{-i\frac{\pi}{2}}$		$e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Les propriétés algébriques de l'exponentielle complexes sont les mêmes que les propriétés de l'exponentielle «classique».

Proposition 1.7 Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

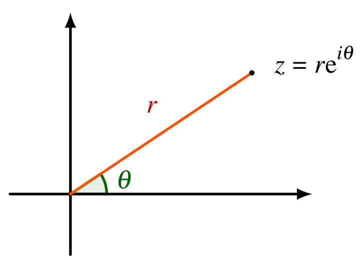
a) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ c) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 1.8 Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, ce nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante, appelée **forme trigonométrique**,

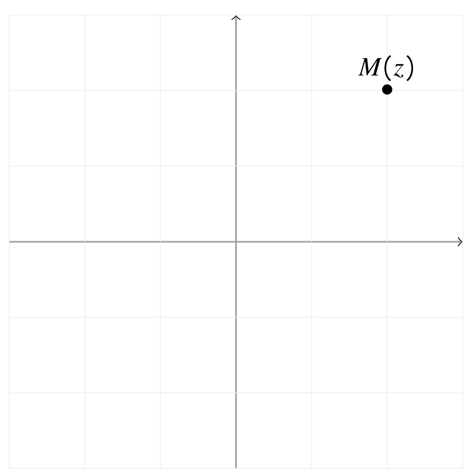
$$z = re^{i\theta} \qquad \text{avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

- Le nombre réel positif r est unique et vaut le module de z, autrement dit $r = |z|$.
- Le nombre réel θ n'est pas unique, est appelé un **argument** de z, et est noté $\arg z$.



Soient $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et M le point du plan d'affixe z. Le couple (r, θ) est un couple de **coordonnées polaires** de M.

Exemple 1.9 Donner la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe représentés ci-dessous.



Proposition 1.10 — Unicité de la forme trigonométrique ?. Pour tout $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a,

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Proposition 1.11 Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

a) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, b) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour passer de la forme trigonométrique d'un nombre complexe à sa forme algébrique, il suffit de se souvenir que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Exemple 1.12 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $2\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$

b) $8e^{i\frac{\pi}{12}}$

Pour passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique, on peut commencer par calculer le module du nombre, factoriser par la quantité obtenue et reconnaître dans le facteur restant un point du cercle trigonométrique qu'il reste à écrire sous forme trigonométrique.

Exemple 1.13 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et en déduire leur argument.

a) $1 + i$

b) $-1 + i\sqrt{3}$

Si le nombre complexe est donné sous la forme d'un produit ou d'un quotient ou d'une puissance, on peut trouver la forme trigonométrique sans récupérer la forme algébrique en identifiant dans l'écriture plusieurs nombres complexes que l'on peut mettre facilement sous forme trigonométrique.

Exemple 1.14 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = (1+i)(-1+i\sqrt{3})$

b) $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Utiliser la forme trigonométrique permet dans certains cas de simplifier les calculs, comme par exemple, lorsque le calcul contient une puissance élevée.

Exemple 1.15 Donner la forme algébrique de $z = (-1+i\sqrt{3})^7$.

1.3 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 1.16 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec a et b réels). On appelle **exponentielle** (complexe) de z le nombre (complexe) suivant

$$\mathrm{e}^z = \underbrace{\mathrm{e}^a}_{\text{exp réelle}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{ib}}_{\text{un point du cercle trigo}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}$$

En particulier,

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a \qquad \text{et} \qquad \arg(\mathrm{e}^z) = b + 2k\pi \ \ (\text{ avec } k \in \mathbb{Z})$$

Certaines propriétés valables pour l'exponentielle réelle ne le sont plus pour l'exponentielle complexe. Par exemple, on ne peut plus dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z > 0$. D'une part, parler de signe d'un nombre complexe n'a pas de sens, d'autre part,

$$\mathrm{e}^{i\pi} = -1$$

Proposition 1.17 Soient z et z' deux nombres complexes.

a) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$

b) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z = z' + 2ik\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

Exemple 1.18 Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = -2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2 Racines n-ièmes

2.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Proposition 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité (les complexes tels que $z^n = 1$) sont exactement les n nombres complexes

$$\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

En particulier, il y a $\underline{n}$ racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire n solutions complexes à l'équation $z^n = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\} = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\} \qquad \text{avec } \omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Démonstration. Remarquons que 0 ne vérifie pas $z^n = 1$. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff (re^{i\theta})^n = 1 \\
&\iff r^n \mathrm{e}^{in\theta} = 1 \times \mathrm{e}^{i0} \\
&\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff z = 1 \times \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, \dots, n-1\}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.3 Donner les racines n-ièmes de l'unité sous forme trigonométrique et algébrique pour $n = 2, 3$ et 4 et les représenter sur le cercle trignométrique.

n	Équation	Racines n-ièmes (forme trigo.)	Racines n-ièmes (forme alg.)
$n = 2$			
$n = 3$			
$n = 4$			

Proposition 2.4 Soit $n \geq 2$. La sommes des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exemple 2.5 Dans cet exercice, on s'intéresse aux racines 3-ièmes de l'unité.

1. Soit $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que
$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$$
2. Simplifier les quantités suivantes *en faisant le moins de calculs possible*.
   a) $j(j+1)$
   b) $\frac{j}{j^2+1}$
   c) $\frac{j+1}{j-1}$

2.2 Racines n-ièmes d'un nombre

Définition 2.6 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de** a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Il n'est pas conseillé d'apprendre le résultat de la proposition suivante mais il est indispensable de savoir le retrouver.

Proposition 2.7 Soit $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $z^n = \rho e^{i\varphi}$ admet n solutions complexes, qui sont les nombres complexes

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Exemple 2.8 Déterminer les racines 2-ièmes (c'est-à-dire les racines carrées) du nombre i.

On cherche donc à résoudre l'équation

$$z^2 = i \qquad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}$$

- **Première méthode en passant par la forme algébrique.** Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
z^2 = i \quad & \iff \quad \begin{cases} z^2 = i \\ |z|^2 = |i| \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 = i \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ xy = 1 > 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\
& \iff \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

- **Deuxième méthode : en passant par la forme trigonométrique.**

Exemple 2.9 Déterminer les racines 3-ièmes du nombre $2+2i$.

3 Formule de trigonométrie

3.1 Linéariser : les formules d'Euler

Linéariser, c'est transformer une expression du type $\cos(x)^a \sin(x)^b$ en une expression sans puissances, uniquement avec $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, etc. Pour cela, on utilise les formules d'Euler.

Proposition 3.1 — Formules d'Euler. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Ces formules proviennent des formules suivantes

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

en remarquant que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

■

Exemple 3.2 En utilisant les formules d'Euler, redémontrer la formule de linéarisation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Exemple 3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^5(x)$.

3.2 Délinéariser : les formules de Moivre

On fait ici l'opération inverse de la linéarisation (que l'on appelle parfois délinéarisation) : on veut exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et de leurs puissances. Pour cela, on utilise la formule de Moivre.

Proposition 3.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Autrement dit,

a) $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$ b) $\sin(nx) = \mathrm{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \mathrm{e}^{inx} = (\mathrm{e}^{ix})^n = (\cos(x) + i\sin(x))^n.$$

■

Exemple 3.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$ et de leurs puissances.

3.3 Technique de l'angle moitié

La technique de «l'angle moitié» permet de factoriser des expressions de la forme $\mathrm{e}^{ia} \pm \mathrm{e}^{ib}$. L'idée est la suivante :

$$\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$$
$$\mathrm{e}^{ia} - \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$$

Exemple 3.6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. «Factoriser» la quantité $e^{i\theta} + 1$.

Les formules suivantes, déjà vues dans le chapitre sur la trigonométrie peuvent se retrouver à partir de la technique de l'angle moitié.

Proposition 3.7 — Formules de factorisation. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

a) $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

b) $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

c) $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

d) $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

3.4 Calcul de sommes de cosinus et sinus

La technique pour calculer une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$$

est de passer par l'exponentielle complexe pour se ramener à une somme géométrique.

Exemple 3.8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$$

3.5 Transformer acos(t)+b sin(t) en un seul cosinus

Proposition 3.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t-\theta) \qquad \text{où } r \text{ et } \theta \text{ vérifient } a + ib = re^{i\theta}$$

Une fonction $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ est appelée signal sinusoidal. En physique, r se note souvent A, représentant l'amplitude du signal et θ se note φ, représentant sa phase.

Exemple 3.10 Écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x) + \sqrt{12}\sin(x)$, sous la forme d'un seul cosinus.

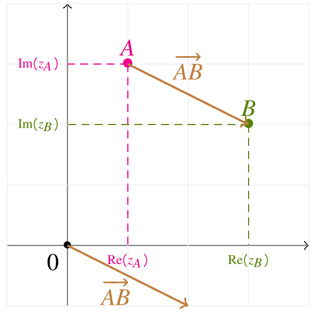
4 Lien avec la géométrie

Pour faire de la géométrie grâce aux nombres complexes, on utilise l'identification suivante : tout point M du plan s'identifie à un unique nombre complexe, et inversement, via le procédé suivant :

$$(x, y) \text{ (dans le plan)} \quad \longleftrightarrow \quad x + iy \text{ (dans } \mathbb{C})$$

	Visio géométrique	Vision «nbres complexes»
Un élément		
Un point de l'axe des abscisses		
Un point de l'axe des ordonnées		
Un point du cercle unité		

? Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.



Exemple 4.1 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5,3)$ et $B(-1,2)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ grâce à la géométrie, puis grâce aux nombres complexes.

4.1 Angle, alignement et orthogonalité

Dans cette partie, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'argument de z appartenant à $[0,2\pi[$ (tandis que $\arg(z)$ désigne seulement un argument de z).

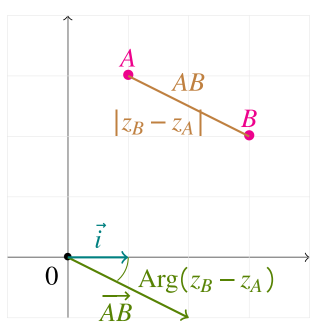
Proposition 4.2 — Distance et angle. Soients les points A, B et C d'affixes z_A, z_B et z_C, avec $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$. Alors,

a) la **distance** entre les points A et B vaut

$$AB = |z_B - z_A|$$

b) l'**angle** entre l'axe des abscisses et $\overrightarrow{AB}$ vaut

$$(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \mathrm{Arg}(z_B - z_A)$$



Exemple 4.3 Soient A et B deux points d'affixe respectives $z_A = 6+3i$ et $z_B = 3-4i$. Déterminer la distance AB.

Proposition 4.4 — Distance et angle. Soient les points A, B et C d'affixes z_A, z_B et z_C, avec $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$. Alors,

a) $\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{BC}{AC}$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

Exemple 4.5 Soient A et B deux points du plan dont les affixes respectives sont -3 et $2i$. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition

$$\left|\frac{z+3}{z-2i}\right| = 1$$

Exemple 4.6 Dans le plan complexe, considérons les points $A(-2i)$, $B(-1+3i)$ et $C(2+i)$. Déterminons l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Proposition 4.7 Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.8 Soient A, B et C trois points du plan d'affixes z_A, z_B et z_C avec A, B et C distincts. Alors

- Les points A, B et C sont alignés

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A)$

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$

$\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

- Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales

$\iff (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ z_C - z_A = \lambda i(z_B - z_A)$

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\,\lambda$

$\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Exemple 4.9 Dans le plan complexe, on considère les points $A(-3)$ et $B(2i)$.

1. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition $\dfrac{z+3}{z-2i} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la position géométrique du point $M(z)$ vérifiant la condition $\dfrac{z+3}{z-2i} \in i\mathbb{R}$.

4.2 Transformations du plan : translations, homothéties et rotations

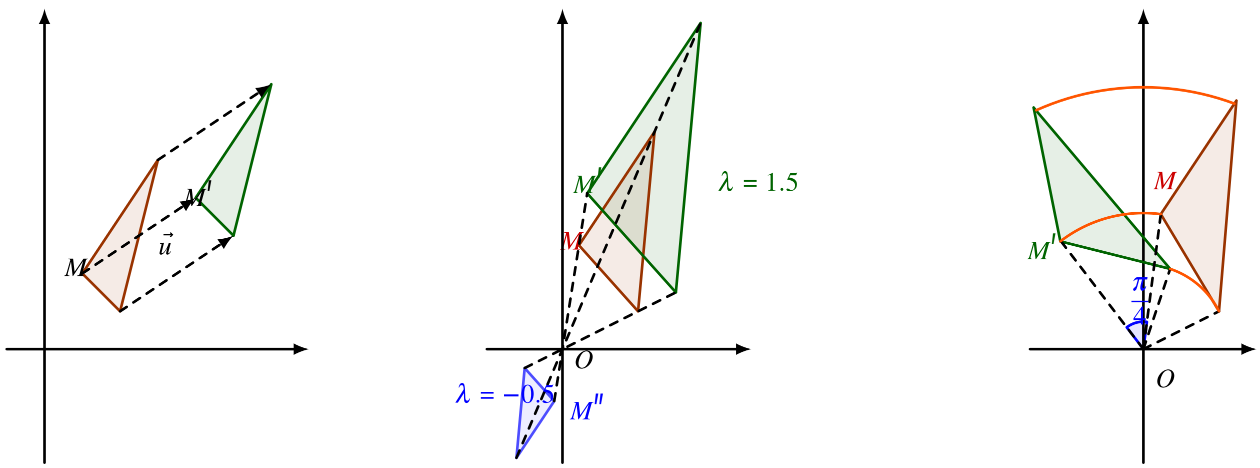
Définition 4.10

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **homothétie de centre** 0 **et de rapport** λ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\,\overrightarrow{OM}$$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation de centre** 0 **et d'angle** θ l'application qui au point M associe le point M' vérifiant
$$OM = OM' \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Les translations et les rotations conservent les distances. Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$.

Proposition 4.11

Application	Transformation associée
$z \longmapsto \overline{z}$	Symétrie par rapport à l'axe des abscisses
$z \longmapsto z+b$	Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
$z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta}z \;\; (\theta \in \mathbb{R})$	Rotation de centre O et d'angle θ
$z \longmapsto kz \;\; (k \in \mathbb{R}^*)$	Homothétie de centre O et de rapport k.
$z \longmapsto az \; (a = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C})$	Composée de l'homothétie de rap. r avec la rotation de centre O et d'angle θ.



TRANSLATION DE VECTEUR $\vec{u}$ HOMOTHÉTIE DE CENTRE 0 ET DE RAPPORT λ ROTATION DE CENTRE 0 ET D'ANGLE θ

Exemple 4.12 Compléter le tableau suivant donnant la correspondance entre une application et la transformation géométrique associée.

Application	Transformation associée
$z \mapsto z+i-4$	
	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
$z \mapsto -iz$	
$z \mapsto -\frac{1}{2}z$	