

TD 06 – Nombres complexes : forme trigonométrique

1 Forme trigonométrique

Exercice 1 – Nombres complexes de module 1.

- Donner la forme algébrique des complexes suivants.
 - $e^{i\frac{\pi}{2}}$
 - $e^{-i\frac{\pi}{4}}$
 - $e^{4i\pi}$
 - $e^{\frac{2i\pi}{3}}$
- Donner la forme trigonométrique des complexes suivants.
 - $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - -1
 - $-i$
 - $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 – Forme trigonométrique vers forme algébrique.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}, \quad z_3 = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}, \quad z_4 = 5e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

Exercice 3 – Forme algébrique vers forme trigonométrique.

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

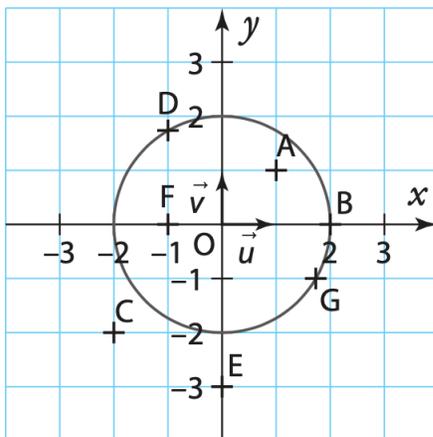
- Niveau 1:
 - $-3 - 3i$
 - 2
 - -15
 - $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$
- Niveau 2 (sans calculer la forme algébrique)
 - $-3e^{\frac{7i\pi}{6}}$
 - $-\frac{4}{3}i$
 - $2ie^{\frac{i\pi}{3}}$
 - $-2i(2 + 2i)$
 - $\frac{2\sqrt{3} - 6i}{-i}$
 - $(1 + i)^5$
 - $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$
 - $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Exercice 4 – Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$\frac{(\sqrt{3} - i)^4}{1 + i} \quad \text{et} \quad (1 + i)^{125}$$

Exercice 5 – Lecture graphique.

Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Déterminer les formes algébrique et trigonométrique de chacun des sept points.



Exercice 6 – Calculs de module et d'argument.

- Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1 - i$$

- En déduire le module et un argument de uv et $\frac{u}{v}$.

Exercice 7 – Propriétés des arguments.

On considère un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{5}$. Pour chaque question, choisir la(les) bonne(s) réponse(s). On pourra s'aider d'une représentation dans le plan.

- Un argument de $-z$ est
 - $-\frac{\pi}{5}$
 - $\frac{4\pi}{5}$
 - $\frac{6\pi}{5}$
 - $\frac{\pi}{5}$
- Un argument de \bar{z} est
 - $-\frac{\pi}{5}$
 - $\frac{4\pi}{5}$
 - $\frac{6\pi}{5}$
 - $\frac{\pi}{5}$
- Un argument de $2z$ est
 - $-\frac{\pi}{5}$
 - $\frac{4\pi}{5}$
 - $\frac{6\pi}{5}$
 - $\frac{\pi}{5}$
- Un argument de z^2 est
 - $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$
 - $\frac{2\pi}{5}$
 - $\frac{\pi}{25}$
 - $\frac{\pi}{5}$

Exercice 8 – Autour de l'exponentielle complexe.

- Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.
 - $e^z = -2$
 - $e^z = 1 + i$
 - $e^{iz} = 1 - i$
- Mettre sous forme algébrique des nombres complexes suivants.
 - $e^{\ln(6) + i\frac{\pi}{4}}$
 - $e^{e^{i\theta}}$

Exercice 9 – Soit $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$.

- Déterminer la forme algébrique de z puis sa forme trigonométrique.
- En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2 Racines n -ièmes

- ### Exercice 10 –
- Déterminer les racines carrées de $-i$.
 - Déterminer les racines carrées de $-1 + i\sqrt{3}$.
 - Déterminer les racines 3-ièmes de -1 .
 - Déterminer les racines 4-ièmes de i .

Exercice 11 –

- Résoudre l'équation $z^5 = -32$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Résoudre l'équation $z^6 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Résoudre l'équation $z^7 = \frac{1 + i}{1 - i\sqrt{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Résoudre l'équation $(z + i)^4 = (z + 1)^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Résoudre l'équation $(z - i)^7 = (z + i)^7$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12 –

En utilisant les racines n -ièmes de l'unité, tracer un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique dont un des sommets est le point A d'affixe 1. Puis, déterminer la longueur de ses côtés.

