TD 06 – Nombres complexes : forme trigonométrique

1 Forme trigonométrique

Exercice 1 – Nombres complexes de module 1.

1. Donner la forme algébrique des complexes suivants.

   a) $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$

   b) $\boxed{e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

   c) $\boxed{e^{4i\pi} = 1}$

   d) $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2. Donner la forme trigonométrique des complexes suivants.

   a) $\boxed{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$

   b) $\boxed{-1 = e^{i\pi}}$

   c) $\boxed{-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

   d) $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

Exercice 2 – Forme trigonométrique vers forme algébrique. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = 3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}, \quad z_3 = 4\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}, \quad z_4 = 5\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}}$$

1. $z_1 = 3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = \boxed{-3i}$,
2. $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \boxed{-1+i}$.
3. $z_3 = 4\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} = 4(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{-2-i2\sqrt{3}}$.
4. $z_4 = 5\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}} = 5(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \boxed{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}}$.

Exercice 3 – Forme algébrique vers forme trigonométrique. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

1. Niveau 1:

   a) $-3-3i = \sqrt{18}(\frac{-3}{\sqrt{18}} - i\frac{3}{\sqrt{18}}) = 3\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \boxed{3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

   b) $2 = 2\times 1 = \boxed{2e^{i0}}$

   c) $-15 = 15\times(-1) = \boxed{15e^{i\pi}}$

   d) $\sqrt{6}+i\sqrt{2} = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} + i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2. Niveau 2 (sans calculer la forme algébrique)

   a) $-3e^{\frac{7i\pi}{6}} = 3\times(-1)\times e^{\frac{7i\pi}{6}} = 3e^{i\pi}e^{\frac{7i\pi}{6}} = 3e^{i\frac{13i\pi}{6}} = \boxed{3e^{\frac{i\pi}{6}}}$

   b) $-\frac{4}{3}i = \frac{4}{3}(-i) = \boxed{\frac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

   c) $2ie^{\frac{i\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

   d) $-2i(2+2i) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}\times 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \boxed{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

   e) $\frac{2\sqrt{3}-6i}{-i} = \frac{4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{2}} = \boxed{4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

   f) $(1+i)^5 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^5 = \boxed{4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$.

   g) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = 2^{10}e^{i\frac{140\pi}{12}} = 1024e^{-i\frac{4\pi}{12}} = \boxed{1024e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

   h) $2(\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})) = 2(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}$

Exercice 4 – Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i} \qquad \text{et} \qquad (1+i)^{125}$$

En passant d'abord par la forme trigonométrique, on obtient

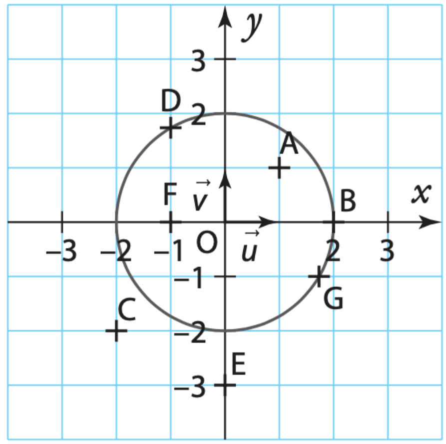
$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i} &= \frac{(2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}})^4}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} \\
&= \frac{16\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} \\
&= 8\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{11\pi}{12}} \\
&= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) \\
&= \boxed{8\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i8\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{125} &= (\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}})^{125} \\
&= \sqrt{2}^{125}\mathrm{e}^{i\frac{125\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2}^{124}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{(120+5)\pi}{4}} \\
&= \boxed{2^{62}\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{120\pi}{4} = 30\pi = 15\times(2\pi)$.

Exercice 5 – Lecture graphique. Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Déterminer les formes algébrique et trigonométrique de chacun des sept points.



a) Affixe de A : $\boxed{z_A = 1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}$

b) Affixe de B : $\boxed{z_B = 2 = 2\mathrm{e}^{i0}}$

c) Affixe de C : $\boxed{z_C = -2 - 2i = \sqrt{8}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

d) Affixe de D : $\boxed{z_D = 2\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}$

e) Affixe de E : $\boxed{z_E = -3i = 3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}}$

f) Affixe de F : $\boxed{z_F = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}}$

g) Affixe de G : $\boxed{z_G = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}$

Exercice 6 – Calculs de module et d'argument.

1. Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad v=1-i$$

Pour trouver le module et un argument de u et v, on peut commencer par les écrire sous forme trigonométrique. Tout d'abord, comme

$$|u|=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=\sqrt{2}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{le module de } u \text{ est donc } \sqrt{2} \text{ et un argument est } -\frac{\pi}{6}.}$ De même, on obtient,

$$v=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi, $\boxed{\text{le module de } v \text{ est donc } \sqrt{2} \text{ et un argument est } -\frac{\pi}{4}.}$

2. En déduire le module et un argument de uv et $\frac{u}{v}$.

En utilisant les résultats de la question précédente, on a,

$$uv=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}=2\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

$\boxed{\text{Le module de } uv \text{ est donc 2 et un argument est } -\frac{5\pi}{12}.}$ Pour trouver ce résultat, on aurait aussi pu utiliser le fait que

$$|uv|=|u|\times|v|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

et que

$$\arg(uv)=\arg(u)+\arg(v)\ (+2k\pi)=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{12}$$

De même, on trouve que

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$$

et donc que $\boxed{\text{le module de } \frac{u}{v} \text{ est donc 1 et un argument est } \frac{\pi}{12}}$ (on pourrait trouver le même résultat en utilisant les règles de calculs sur le module/argument).

Exercice 7 – Propriétés des arguments. On considère un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{5}$. Pour chaque question, choisir la(les) bonne(s) réponse(s). *On pourra s'aider d'une représentation dans le plan.*

1. Un argument de $-z$ est

   a) $-\frac{\pi}{5}$ b) $\frac{4\pi}{5}$ c) $\boxed{\frac{6\pi}{5}}$ d) $\frac{\pi}{5}$

2. Un argument de $\overline{z}$ est

   a) $\boxed{-\frac{\pi}{5}}$ b) $\frac{4\pi}{5}$ c) $\frac{6\pi}{5}$ d) $\frac{\pi}{5}$

3. Un argument de $2z$ est

   a) $-\frac{\pi}{5}$ b) $\frac{4\pi}{5}$ c) $\frac{6\pi}{5}$ d) $\boxed{\frac{\pi}{5}}$

4. Un argument de z^2 est

   a) $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$ b) $\boxed{\frac{2\pi}{5}}$ c) $\frac{\pi}{25}$ d) $\frac{\pi}{5}$

Exercice 8 – Autour de l'exponentielle complexe.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

   a) $e^z = -2$ $\boxed{\iff z = \ln(2) + i(\pi + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

   b) $e^z = 1+i \iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\iff z = \frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

   c) $e^{iz} = 1 - i \iff e^{i \operatorname{Re} z} e^{-\operatorname{Im} z} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\iff z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

2. Mettre sous forme algébrique des nombres complexes suivants.

   a) $e^{\ln(6) + i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln 6} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 6 \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}}$

   b) $e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)} \times (\cos(\sin(\theta)) + i\sin(\sin(\theta))) = \boxed{e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta)) + ie^{\cos(\theta)}\sin(\sin(\theta))}$

Exercice 9 – Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z puis sa forme trigonométrique.

   On peut montrer que
   $$z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   Ainsi,
   $$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{12}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{12})) = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\pi}{12}) - i\sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{12})$$

   Par identification des parties réelles et imaginaires, on en déduit que
   $$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

   Enfin,
   $$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

2 Racines n-ièmes

Exercice 10 –

1. Déterminer les racines carrées de $-i$.

   On a,
$$i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$$
   Ainsi, les deux racines carrées de i sont
$$\sqrt{1}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}+k\pi} \quad \text{avec } k \in \{0,1\}$$
   c'est-à-dire
$$\boxed{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \boxed{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

2. Déterminer les racines carrées de $-1+i\sqrt{3}$.

   On a,
$$-1+i\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$$
   Ainsi, les deux racines carrées de i sont
$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{6}+k\pi} \quad \text{avec } k \in \{0,1\}$$
   c'est-à-dire
$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{6}} = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\frac{2i\pi}{6}+\pi)} = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

3. Déterminer les racines 3-ièmes de -1.

   On cherche à résoudre l'équation
$$z^3 = -1$$
   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
$$z^3 = -1 \iff r^3\mathrm{e}^{3i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{3}[\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$
$$\iff z = \mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}, \text{ avec } k \in \{0,1,2\}.$$
   $\boxed{\text{Les solutions sont donc } \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \text{ et } \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}.}$

4. Déterminer les racines 4-ièmes de i.

   On cherche à résoudre l'équation
$$z^4 = i$$
   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
$$z^4 = i \iff r^4\mathrm{e}^{4i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \iff \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$
$$\iff z = \mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}, \text{ avec } k \in \{0,1,2,3\}.$$
   $\boxed{\text{Les solutions sont donc } \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{8}}, \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{8}} \text{ et } \mathrm{e}^{i\frac{13\pi}{8}}.}$

Exercice 11 –

1. Résoudre l'équation $z^5 = -32$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

$$z^5 = -32 \iff r^5 e^{5i\theta} = 2^5 e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^5 = 2^5 \\ 5\theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{5}[\dfrac{2\pi}{5}] \end{cases}$$

$$\iff z = 2e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont donc } 2e^{i(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4\}.}$$

2. Résoudre l'équation $z^6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   On a,

$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

   Par la même méthode, on obtient que les solutions sont

$$\boxed{2^{1/6}e^{i(\frac{2\pi}{18}+\frac{2k\pi}{6})} = 2^{1/6}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})} \text{ avec } k \in \{0,1,\ldots,5\}.}$$

3. Résoudre l'équation $z^7 = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   On a,

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

   Par la même méthode, on obtient que les solutions sont

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/7} e^{i(\frac{7\pi}{12\times 7}+\frac{2k\pi}{7})} = \frac{1}{\sqrt[14]{2}}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{7})} \text{ avec } k \in \{0,1,\ldots,6\}}$$

4. Résoudre l'équation $(z+i)^4 = (z+1)^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$. On a,

$$\begin{aligned} (z+i)^4 = (z+1)^4 &\iff \left(\frac{z+i}{z+1}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z+i}{z+1} = e^{\frac{2i\pi k}{4}} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3\} \\ &\iff \frac{z+i}{z+1} = 1 \text{ ou } \frac{z+i}{z+1} = i \text{ ou } \frac{z+i}{z+1} = -1 \text{ ou } \frac{z+i}{z+1} = -i \\ &\iff \boxed{z = 0 \text{ ou } z = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \text{ ou } z = -1-i} \end{aligned}$$

5. Résoudre l'équation $(z-i)^7 = (z+i)^7$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12 – En utilisant les racines n-ièmes de l'unité, tracer un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique dont un des sommets est le point A d'affixe 1. Puis, déterminer la longueur de ses côtés.

3 Trigonométrie

Exercice 13 – Linéariser. Linéariser les expressions suivantes.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4(x) = \boxed{\frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^3(x) = \boxed{\frac{1}{4}(-\sin(3x) + 3\sin(x))}$

c)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2i)^2 \times 2^3}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{5ix} + 3e^{3ix} + 3e^{ix} + e^{-ix} - 2e^{3ix} - 6e^{ix} - 6e^{-ix} - 2e^{-5ix} + e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{-3ix} + e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{16}\left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} - 2\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{16}(\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x))}
\end{aligned}$$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4(x)\sin(x) = \boxed{\frac{1}{16}(\sin(5x) + 3\sin(3x) + 2\sin(x))}$

Exercice 14 – Délinéariser. Délinéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et de leurs puissances les nombres suivants.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x)=$ $\boxed{3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)}$

b)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}(\cos(x)+i\sin(x))^5 &= \cos(x)^5 + 5\cos(x)^4(i\sin(x)) + 10\cos(x)^3(i\sin(x))^2 + 10\cos(x)^2(i\sin(x))^3 \\ &\quad + 5\cos(x)(i\sin(x))^4 + (i\sin(x))^5 \\ &= \cos(x)^5 + 5i\cos(x)^4\sin(x) - 10\cos(x)^3\sin(x)^2 - 10i\cos(x)^2\sin(x)^3 + 5\cos(x)\sin(x)^4 + i\sin(x)^5 \\ &= \cos(x)^5 - 10\cos(x)^3\sin(x)^2 + 5\cos(x)\sin(x)^4 + i\left(5\cos(x)^4\sin(x) - 10\cos(x)^2\sin(x)^3 + \sin(x)^5\right).\end{aligned}$$

Comme

$$\sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i5x}) = \mathrm{Im}((\mathrm{e}^{ix})^5) = \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^5)$$

on obtient,

$$\sin(5x) = \boxed{\sin(x)^5 + 5\sin(x)\cos^4(x) - 10\sin^3(x)\cos^2(x)}$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\sin^2(x)\cos^3(x) + 5\sin^4(x)\cos(x)}$ en ré-utilisant les calculs de la question précédente.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos(6x) = -\sin^6(x) + \cos^6(x) - 15\sin^2(x)\cos^2(x) + 15\sin^4(x)\cos^2(x)}$

Exercice 15 – Technique de l'angle moitié. En utilisant la technique de l'angle moitié,

1. Factoriser les expressions suivantes et en donner le module et un argument.

a) $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a,

$$\begin{aligned} 1+e^{i\frac{\pi}{3}} &= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\boxed{=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{le module vaut donc } \sqrt{3} \text{ et un argument } \frac{\pi}{6}.}$

b) $1+e^{i\frac{4\pi}{3}}$

On a,

$$\begin{aligned} 1+e^{i\frac{4\pi}{3}} &= e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}}2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ce n'est pas la forme trigo car } -1 \text{ devant} \\ &= e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\boxed{=e^{i\frac{5\pi}{3}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le module vaut donc 1 et un argument } \frac{5\pi}{3}.}$

c) $1-e^{i\frac{\pi}{4}}$

On a,

$$\begin{aligned} 1-e^{i\frac{\pi}{4}} &= e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{\pi}{8}}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{8}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \\ &\boxed{=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{-3i\pi}{8}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le module vaut donc } 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ et un argument } -\frac{3\pi}{8}.}$

d) $i-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

On a,

$$\begin{aligned} i-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}\right) && \text{car } \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{3\pi}{8} \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}}2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}} \\ &\boxed{= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{8}}.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le module vaut donc } 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et un argument } \frac{7\pi}{8}.}$$

2. Déterminer la forme trigonométrique des expressions suivantes:

a) $\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}}$

On suppose $\theta\notin\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. On a,

$$\begin{aligned} \frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}} &= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{i\theta}\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^{i\theta}.} \end{aligned}$$

b) $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$

On a,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{2i\theta} &= e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \qquad \text{car } \frac{\theta+2\theta}{2}=\frac{3\theta}{2} \\ &= e^{i\frac{3\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Attention, selon le signe du facteur devant l'exponentielle complexe, on a (ou pas) la forme trigonométrique du nombre.

- Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$, autrement dit si $\theta\in]-\pi+4k\pi,\pi+4k\pi[$ (avec $k\in\mathbb{Z}$), alors la forme trigonométrique de $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$ est bien

$$\boxed{e^{i\theta}+e^{2i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}}}$$

- Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)<$, autrement dit si $\theta\in]\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi[$, alors la forme trigonométrique esr

$$e^{i\theta}+e^{2i\theta}=-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}}=\boxed{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\frac{3\theta}{2}+\pi)}}$$

c) $\dfrac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}}$

On suppose $\theta \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \\
&= -\frac{i}{1}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \boxed{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{\theta}{2}}}
\end{aligned}$$

- Si $\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} > 0$, alors la dernière égalité est la forme trigonométrique du nombre complexe.
- Si $\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} < 0$ alors la forme trigonométrique du nombre est

$$\boxed{\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}}$$

Exercice 16 – Mettre sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{26}$$

Tout d'abord, en utilisant la technique de l'angle moitié, on remarque que

$$\begin{aligned}
1+e^{i\frac{\pi}{3}} &= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\\
&= e^{i\frac{\pi}{6}}2\cos\frac{\pi}{6}\\
&= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{26} &= \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{26}\\
&= 3^{13}e^{i\frac{13\pi}{3}}\\
&= 3^{13}e^{i\frac{\pi}{3}}\\
&= 3^{13}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 3^{13}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&\boxed{= \frac{3^{13}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\times 3^{13}}{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 17 – Calcul de sommes. Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On peut commencer par remarquer que

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ikt}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt}\right)$$

On a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} &= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{it})^k = \frac{(\mathrm{e}^{it})^{n+1}-1}{\mathrm{e}^{it}-1} = \frac{\mathrm{e}^{it(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{it}-1} \quad \text{car } \mathrm{e}^{it} \neq 1 && \textit{[Calcul d'une somme géométrique]}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{t(n+1)}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t(n+1)}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{t(n+1)}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}\right)} && \textit{[Technique de l'angle moitié]}\\
&= \frac{e^{i\frac{tn}{2}} \times 2i\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{2i\sin(\frac{t}{2})} && \textit{[Formules d'Euler]}\\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{e}^{i\frac{tn}{2}} && \textit{[Simplifications]}\\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\left(\cos\left(\frac{tn}{2}\right) + i\sin\left(\frac{tn}{2}\right)\right) && \textit{[Mise sous forme algébrique]}\\
&= \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos\left(\frac{tn}{2}\right) + i\,\frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(\frac{tn}{2}\right). && \textit{[Écriture sous forme algébrique]}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(\frac{tn}{2}\right)}$$

b) $\sum_{k=0}^{32} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$

On a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{32} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{32} \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{32} \mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{3}}\\
&= \frac{1-(\mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{3}})^{33}}{1-\mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{3}}}\\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{ik22\pi}}{1-\mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{3}}}\\
&= \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{3}}}\\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kt)$

On a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kt) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{ikt}) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikt}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{it})^k 1^{n-k}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left((1+\mathrm{e}^{ikt})^n\right) \qquad \text{par binôme de Newton} \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{i\frac{kt}{2}} 2\cos\left(\frac{kt}{2}\right)\right)^n\right) \qquad \text{technique de l'angle moitié} \\
&= \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{i\frac{nkt}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{kt}{2}\right)\right) \\
&\boxed{= \sin\left(\frac{nkt}{2}\right) 2^n \cos^n\left(\frac{kt}{2}\right)}
\end{aligned}$$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$

On peut commencer par remarquer que

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i(a+bk)}\right)$$

- Supposons que $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{e}^{ib} \neq 1$ et donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i(a+bk)} &= \mathrm{e}^{ia} \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{ib}\right)^k \\
&= \mathrm{e}^{ia} \frac{1-\mathrm{e}^{ib(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{ib}} \\
&= \mathrm{e}^{ia} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{b(n+1)}{2}} \sin(b\frac{n+1}{2})}{\mathrm{e}^{ib/2} \sin(b/2)} \\
&= \mathrm{e}^{i(a+\frac{bn}{2})} \frac{\sin(b\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}.
\end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\boxed{S = \cos(a+\frac{bn}{2}) \frac{\sin(b\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}}$$

- Si $b \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(a+bk) = (n+1)\cos(a)}$$

Exercice 18 – Mettre sous la forme d'un seul cosinus.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ l'expression $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)$.

   On peut commencer par calculer que

$$\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

   On a,

$$\begin{aligned}\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos(x)-\sin\frac{\pi}{3}\sin(x)\right)\\ &\boxed{= 2\cos(x+\frac{\pi}{3})}\end{aligned}$$

   (b) En déduire les solutions de $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on a,

$$\begin{aligned}\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1 &\iff 2\cos(x+\frac{\pi}{3})=1\\ &\iff \cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\\ &\iff x+\frac{\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x+\frac{\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\\ &\boxed{\iff x\equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]}\end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}=0$.

   De même, on peut montrer que,

$$\boxed{\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}=0 \iff x\equiv-\frac{\pi}{12}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x)+\sin(2x)=0$.

   De même, on peut montrer que,

$$\boxed{\cos(2x)+\sin(2x)=0 \iff x\equiv-\frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}]}$$

4 Géométrie

Exercice 19 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $(1+i)$, $(4+3i)$ et $\frac{5}{2}i$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   Il s'agit de montrer que

   $$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

   Or, on a,

   $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= \operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(\frac{\frac{5}{2}i - (1+i)}{4+3i-(1+i)}\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(\frac{-1+\frac{3}{2}i}{3+2i}\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(\frac{(-1+\frac{3}{2}i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(\frac{\frac{13}{2}i}{13}\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(\frac{i}{2}\right)\\ &\boxed{= \frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 4+2i$, $z_B = 2+i$, $z_C = 2+2i$ et $z_D = 3$. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ? *On pourra commencer par représenter les points dans le plan afin d'émettre une conjecture, puis démontrer la conjecture.*

   Montrons que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Pour cela, on peut déterminer le point d'intersection des deux droites, en cherchant le point I tel que A,B, I sont alignés et C,D,I sont alignés, c'est-à-dire en cherchant le complexe $z_I \in \mathbb{C}$ tel que

   $$\frac{z_I - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{z_I - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

   Puis, on peut montrer que

   $$(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

3. Déterminer le lieu des points M d'affixes z tels que

   $$\left|\frac{z+1}{z-1+i\sqrt{3}}\right| = 1$$

   Notons A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe $1-i\sqrt{3}$. Alors,

   $$\left|\frac{z+1}{z-1+i\sqrt{3}}\right| = 1 \iff \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \iff \frac{MA}{MB} = 1 \iff MA = MB$$

   Ainsi, $\boxed{\text{M est sur la médiatrice du segment [AB].}}$

4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que

$$\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R}$$

Notons O l'origine du plan (i.e le point d'affixe 0) et A le point d'affixe A. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, z - zO = \lambda(z - z_A) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{AM} \\
&\iff \text{les pts O,A,M sont alignés}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{M est sur l'axe des abscisses du repère.}}$

Exercice 20 – Transformations du plan.

1. Soit $f_1 : z \longmapsto z - 1 + 3i$. À quelle transformation du plan correspond f_1 ?

   On remarque que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = z + z_A$$
   où $z_A = -1 + 3i$. Donc cela correspond à $\boxed{\text{une } \textbf{translation} \text{ de vecteur d'affixe } z_A.}$

2. Soit $f_2 : z \longmapsto (1+i)z$. À quelle transformation du plan correspond f_2 ?

   On remarque que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}z$$
   Donc cela correspond à la $\boxed{\text{composée d'une } \textbf{homothétie} \text{ de rapport } \sqrt{2} \text{ avec la } \textbf{rotation} \text{ de centre 0 et d'angle } \frac{\pi}{4}.}$

Exercice 21 – Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$ et $P(z^3)$ soient alignés.

D'après un résultat du cours,

$$\begin{aligned}
\text{les points } M(z), N(z^2) \text{ et } P(z^3) \text{ soient alignés} &\iff \frac{z^3-z}{z^2-z} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{z(z^2-1)}{z(z-1)} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R} \\
&\iff \overline{\frac{z^2-1}{z-1}} = \frac{z^2-1}{z-1} \\
&\iff \frac{\bar{z}^2-1}{\bar{z}-1} = \frac{z^2-1}{z-1} \\
&\iff (\bar{z}^2-1)(z-1) = (z^2-1)(\bar{z}-1) \\
&\iff \bar{z}^2 z - z^2\bar{z} - \bar{z}^2 + z^2 - z + \bar{z} = 0 \\
&\iff \bar{z}z(\bar{z}-z) + (z-\bar{z})(z+\bar{z}) + \bar{z} - z = 0 \\
&\iff (\bar{z}-z)[\bar{z}z - z - \bar{z} + 1] = 0 \\
&\iff \bar{z} - z = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{z}z - z - \bar{z} + 1 = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 0
\end{aligned}$$

De plus, en écrivant $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 0 \iff (a-1)^2 + b^2 = 0 \iff |z-1|^2 = 0 \iff z = 1$$

(...?)

5 Approfondissement

Exercice 22 – Déterminer les entiers n tels que $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}_+$.

En passant par la forme trigonométrique, on trouve que,

$$(1+i\sqrt{3})^n = (2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin(n\pi/3) = 0$ et $\cos(n\pi/3) \geq 0$. Or, $\sin(n\pi/3) = 0$ si et seulement si $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos(n\pi/3) = \cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les $\boxed{\text{multiples de 6}}$.

Exercice 23 – Posons $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z^k - 1$.
2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Exercice 24 – On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Que valent ω^5 et $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5$?
2. Exprimer $\frac{1}{\omega}$ sous la forme ω^k, avec $k \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de la somme

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+1+\omega+\omega^2.$$

3. Exprimer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. A l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$$

5. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 25 – Montrer que les solutions complexes de l'équation $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 26 – Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 27 – Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante, faisant intervenir une rotation, pour que le triangle ABC soit équilatéral.
2. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$.