

7. Systèmes Linéaires

Définition 0.1 — Système Linéaire. On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues un système (S) de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où

- et les réels $x_1, \dots, x_p$ sont les p *inconnues* du système,
- les réels $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}$ sont les *coefficients* du système,
- et le vecteur de réels $(b_1, \dots, b_n)$ forme le *second membre* du système.

Une *solution* du système est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie le système (S) ci-dessus.

Exemple 0.2 Montrer que le *triplet* $(-1, 0, 2)$ est une solution du système suivant,

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

? Une équation du type

$$a_1x + a_2y = b \quad \text{ou de manière équivalente (si } a_2 \neq 0) \quad y = -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}$$

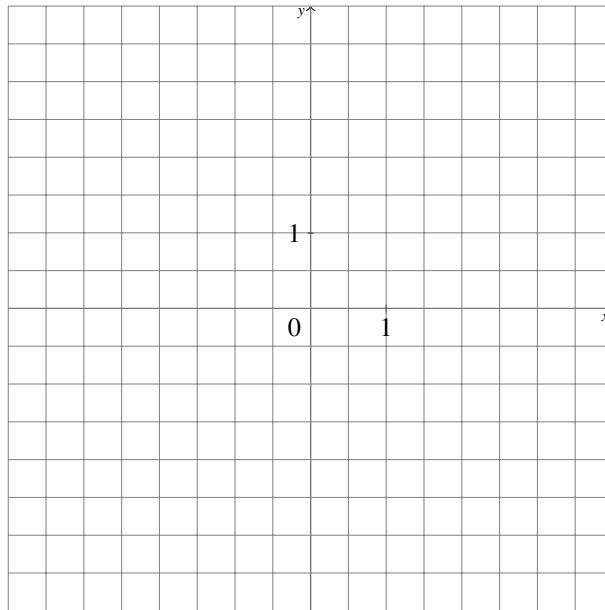
est l'équation d'une *droite dans le plan*. Ainsi, résoudre un système de deux équations à deux inconnues du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

revient à chercher l'*intersection de deux droites* dans l'espace.

Exemple 0.3 Résoudre *graphiquement* le système suivant,

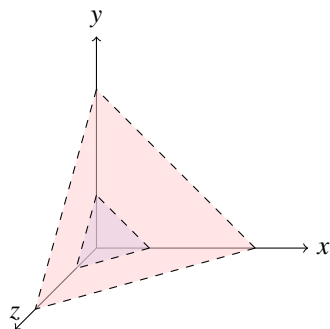
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



? Une équation du type

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

est l'équation d'un *plan dans l'espace*. Ainsi, résoudre un système de deux équations à trois inconnues revient à déterminer l'intersection de deux plans dans l'espace, ou encore résoudre un système de trois équations à trois inconnues revient à déterminer l'intersection de trois plans dans l'espace.



Le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

n'admet *aucune* solution car les deux lignes du système sont incompatibles. Géométriquement, cela correspond au fait que les deux plans sont parallèles et non confondus.

1 Résolution d'un système linéaire

1.1 Résolution pour des systèmes échelonnés

De manière informelle, un système linéaire est **échelonné** si à chaque ligne, au moins une inconnue disparaît de toutes les lignes suivantes. Ces systèmes sont simples à résoudre en «remontant les équations du bas vers le haut».

Un système linéaire échelonné peut admettre

- soit *aucune* solution,
- soit une *unique* solution,
- soit une *infinité* de solutions.

Exemple 1.1 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Exemple 1.2 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Exemple 1.3 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

1.2 Résolution pour des systèmes non échelonnés

La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système (cf. ci-dessous) pour se ramener à un système échelonné que l'on sait résoudre.

Proposition 1.4 On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système linéaire l'une des opérations suivantes :

- *intervertir* les lignes i et j , opération que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$,
- *ajouter* à la ligne i , λ fois la ligne j ($j \neq i$), notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$,
- *multiplier* la ligne i par $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ne modifie pas l'ensemble des solutions.

Un système linéaire quelconque peut admettre

- soit *aucune* solution,
- soit une *unique* solution,
- soit une *infinité* de solutions.

Exemple 1.5 Résoudre le système suivant

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + 3z - 2y = 1 \\ -2 + 2y - z = x \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases}$$

Exemple 1.6 Résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 7x + 8y + 9z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.7 Résoudre le système suivant grâce à l'algorithme de Gauss,

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Exemple 1.8 Résoudre le système suivant grâce à l'algorithme de Gauss,

$$(S) \begin{cases} a + 2b + 3c = 1 \\ 7a + 8b + 9c = -1 \\ 4a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

1.3 Résolution d'un système linéaire avec un paramètre

Exemple 1.9 Soit m un paramètre réel. Résoudre le système suivant,

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$