TD 07 – Systèmes Linéaires

Exercice 1 – Résoudre les systèmes linéaires suivants de manière graphique puis de manière calculatoire en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

Exercice 2 – Résolution de système échelonné. Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -y - 3z = -6 \\ -4z = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z = 1 \end{cases}$

Exercice 3 – Résolution par pivot de Gauss. Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2u + v - 2w = 10 \\ u + v + 4w = -9 \\ 7u + 5v + w = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ a + 2b - 3c = 6 \\ 7a + 4b - c = 22 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$

Exercice 4 – Nombre de solutions. Dans cette exercice, on cherche à déterminer le nombre de solutions possibles d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

1. Combien de points d'intersections peuvent avoir deux droites dans le plan ? Représenter graphiquement chacun des cas en donnant explicitement l'équation des droites représentées.
2. En déduire le nombre de solutions possibles pour un système linéaire de deux équations à deux inconnues et donner un exemple de système linéaire dans chacun des cas.

Exercice 5 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases}$$

Exercice 6 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 – Avec un autre formalisme. Trouver les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x+y = y+z = z+x$

Exercice 8 – Vrai/Faux. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple explicite qui illustre la non véracité de l'assertion.

1. On ne change pas les solutions d'un système linéaire en intervertissant deux lignes de ce système.
2. Un système linéaire de deux équations à deux inconnues admet toujours au moins une solution.
3. Une système linéaire de trois équations à trois inconnues ne peut pas admettre une infinité de solutions.
4. Dans le plan, l'intersection de deux droites est caractérisée par un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Exercice 9 – Un peu de géométrie. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations données ci-dessous :

$$(P_1): \quad (1-a)x - 2y + z = 0$$
$$(P_2): \quad 3x - (1+a)y - 2z = 0$$
$$(P_3): \quad 3x - 2y - (1+a)z = 0$$

Exercice 10 – Oral PSI, Mines-Télécom, 2022. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 11 – Oral PSI, Mines-Télécom, 2021. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur des paramètres $m, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$$