

TD 07 – Systèmes Linéaires (Correction)

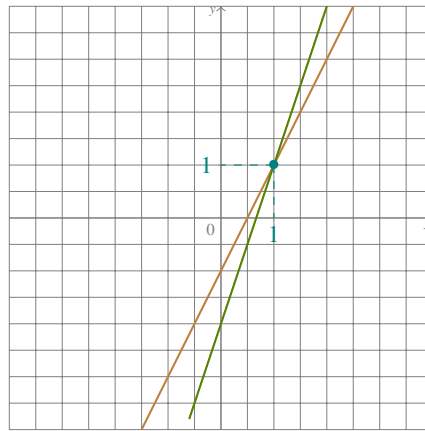
Exercice 1 – Résoudre les systèmes linéaires suivants de manière graphique puis de manière calculatoire en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

► **Approche graphique** : On peut commencer par remarquer que

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = 2x - 1$ et $y = 3x - 2$. Cette question peut être résolue graphiquement.



► **Approche analytique** : On peut aussi résoudre ce système grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet donc une unique solution, donnée par le couple

$$(1, 1)$$

✚ **Vérification.** Le couple $(1, 1)$ est bien une solution du système car

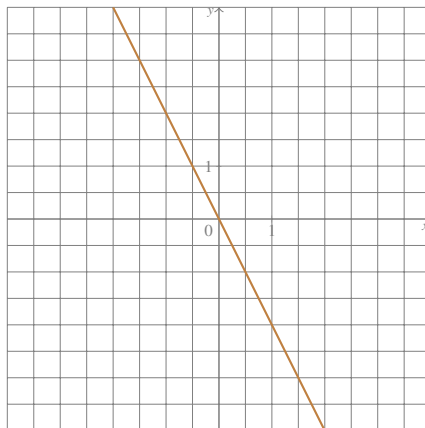
$$\begin{cases} 2 \times 1 - 1 = 1 & \checkmark \\ 3 \times 1 - 1 = 2 & \checkmark \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

► **Approche graphique** : On peut commencer par remarquer que

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = -2x \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = -2x$ et $y = -2x$. Cette question peut être résolue graphiquement.



Ce système admet une infinité de solutions qui sont les points du plan qui appartiennent à la droite d'équation $y = -2x$.

► **Approche analytique** : On peut aussi résoudre ce système grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -2x \end{aligned}$$

Ce système admet donc une infinité de solutions, de la forme

$$(x, -2x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

✚ **Vérification.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le couple $(x, -2x)$ est bien une solution du système car

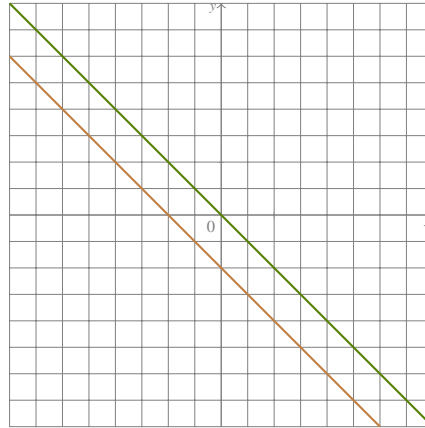
$$\begin{cases} 4 \times x + 2 \times (-2x) = 0 & \checkmark \\ -2x - (-2x) = 0 & \checkmark \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

► **Approche graphique** : On peut commencer par remarquer que

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x \end{cases}$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = -x + 1$ et $y = -x$. Cette question peut être résolue graphiquement.



Le système linéaire n'admet aucune solution.

► **Approche analytique** : On peut aussi résoudre ce système grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

La dernière ligne est incompatible. Ce système admet donc aucune solution.

Exercice 2 – Résolution de système échelonné. Résoudre les systèmes suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -y - 3z = -6 \\ -4z = -8 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence et résolvons ce système de «bas en haut».

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -y - 3z = -6 \\ -4z = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -y - 3z = -6 \\ z = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, ce système linéaire admet une unique solution, donnée par le triplet $(-3, 0, 2)$.

 **Vérification.** Le triplet $(-3, 0, 2)$ est bien une solution de ce système car,

$$\begin{cases} -1 + 0 + 2 \times 2 = 3 & \checkmark \\ -0 - 3 \times 2 = -6 & \checkmark \\ -4 \times 2 = -8 & \checkmark \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

La dernière ligne est incompatible. Ce système linéaire n'admet aucune solution.

$$c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence et résolvons ce système de «bas en haut». Notons que ce système linéaire contient **plus d'inconnues que d'équations** : on choisit deux inconnues principales, par exemple x et y , que l'on va exprimer en fonction de l'inconnue restante z .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = 1 - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (1 - z) - z \\ y = 1 - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, ce système linéaire admet une infinité de solutions, données par

$$(0, 1 - z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}$$

 **Vérification.** Pour tout $z \in \mathbb{R}$, le triplet $(0, 1 - z, z)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 0 + 1 - z + z = 1 & \checkmark \\ 1 - z + z = 1 & \checkmark \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z = 1 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence et résolvons ce système de «bas en haut».

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc ce système linéaire admet une unique solution donnée par le triplet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

 **Vérification.** Le triplet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 & \checkmark \\ 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1 & \checkmark \\ 4 \times \frac{1}{4} = 1 & \checkmark \end{cases}$$

Exercice 3 – Résolution par pivot de Gauss. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2u + v - 2w = 10 \\ u + v + 4w = -9 \\ 7u + 5v + w = 14 \end{cases}$$

On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2u + v - 2w = 10 \\ u + v + 4w = -9 \\ 7u + 5v + w = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 4w = -9 \\ 2u + v - 2w = 10 \\ 7u + 5v + w = 14 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 4w = -9 \\ -v - 10w = 28 \\ -2v - 27w = 77 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 7L_1 \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 4w = -9 \\ -v - 10w = 28 \\ -7w = 21 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 4w = -9 \\ -v - 10w = 28 \\ w = -3 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \\ w = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet donc une unique solution donnée par $(1, 2, -3)$.

✚Vérification. Le triplet $(1, 2, -3)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} 2 \times 1 + 2 - 2 \times (-3) = 10 & \checkmark \\ 1 + 2 + 4 \times (-3) = -9 & \checkmark \\ 7 \times 1 + 5 \times 2 - 3 = 14 & \checkmark \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$$

On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ -14y + 22z = 17 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 8L_1 \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ 0 = -3 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

La dernière ligne est incompatible. Le système linéaire admet donc aucune solution.

$$c) \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ a + 2b - 3c = 6 \\ 7a + 4b - c = 22 \end{cases}$$

On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ a + 2b - 3c = 6 \\ 7a + 4b - c = 22 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ 5b - 10c = 10 \\ 25b - 50c = 50 \end{cases} &\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ 5b - 10c = 10 \\ 0 = 0 \end{cases} &\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

La dernière ligne n'apporte aucune information, on peut donc la supprimer du système.

$$\begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ a + 2b - 3c = 6 \\ 7a + 4b - c = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ 5b - 10c = 10 \end{cases}$$

Le système contient alors plus d'inconnues que d'équations. On choisit alors deux inconnues principales (car il reste deux équations) qu'on exprime en fonction des inconnues restantes par pivot de Gauss. Par exemple, on va exprimer a et b en fonction de c .

$$\begin{aligned} \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ a + 2b - 3c = 6 \\ 7a + 4b - c = 22 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ 5b - 10c = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 7c = -4 \\ b = 2c + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c + 2 \\ b = 2c + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet donc une **infinité de solutions**, données par,

$$(-c + 2, 2c + 2, c) \text{ pour tout } c \in \mathbb{R}$$

✚ Vérification. Soit $c \in \mathbb{R}$. Le triplet $(-c + 2, 2c + 2, c)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} -c + 2 - 3 \times (2c + 2) + 7c = -4 & \checkmark \\ -c + 2 + 2 \times (2c + 2) - 3c = 6 & \checkmark \\ 7 \times (-c + 2) + 4 \times (2c + 2) - c = 22 & \checkmark \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire n'admet **aucune solution**.

$$e) \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

Le système linéaire admet une infinité de solutions données par

$$(2z - 4t - 2, -3z + 7t + 3, z, t) \quad \text{pour tout } (z, t) \in \mathbb{R}^2$$



$$f) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Le système linéaire admet une unique solution donnée par

$$(4, 3, 2).$$



Exercice 4 – Nombre de solutions. Dans cette exercice, on cherche à déterminer le nombre de solutions possibles d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

1. Combien de points d'intersections peuvent avoir deux droites dans le plan ? Représenter graphiquement chacun des cas en donnant explicitement l'équation des droites représentées.

Dans le plan, deux droites peuvent

- soit être parallèles non confondues : elles admettent alors aucun point d'intersection.
- soit être parallèles confondues : elles admettent alors une infinité de points d'intersection.
- soit être non parallèles : elles admettent alors un unique point d'intersection.

2. En déduire le nombre de solutions possibles pour un système linéaire de deux équations à deux inconnues et donner un exemple de système linéaire dans chacun des cas.

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues peut (cf Exercice 1)

- admettre aucune solution, comme par exemple le système suivant,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- admettre une infinité de solution, comme par exemple le système suivant,

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x$$

- admettre une unique solution comme par exemple le système suivant,

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout ce système linéaire grâce au pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x - 2y = 0 \\ -x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)x - 2y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-\lambda)y = 0 \\ [-2 + (3-\lambda)(2-\lambda)]y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_2 + (2-\lambda)L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-\lambda)y = 0 \\ [\lambda^2 - 5\lambda + 4]y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

À ce stade, dans la deuxième ligne, on souhaite diviser par $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ pour en déduire y . Mais pour cela, il faut savoir si ce facteur est nul ou non.

- Premier cas : si $\lambda^2 - 5\lambda + 4 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-\lambda)y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce cas, le système admet une unique solution donnée par $(0, 0)$.  

- Deuxième cas : si $\lambda = 1$, on obtient alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-1)y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0 \end{aligned}$$

Le système possède plus d'inconnues que d'équations. On exprime alors une inconnue (car il ne reste qu'une équation) en fonction des autres, par exemple, on exprime l'inconnue x en fonction de y .

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solution, données par,

$$(2y, y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \quad \text{ $$

- Troisième cas : si $\lambda = 4$, on obtient alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + (3-4)y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -y \end{aligned}$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solution, données par,

$$(-y, y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \quad \text{ $$

Exercice 6 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -3y + 3z = m-1 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ 0 = m+2 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \end{aligned}$$

- Si $m+2 \neq 0$, c'est-à-dire $\boxed{\text{si } m \neq -2}$, alors la dernière ligne est incompatible et le système linéaire n'admet $\boxed{\text{pas de solutions.}}$
- Si $m+2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\text{si } m = -2}$, alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 1+z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+z \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une $\boxed{\text{infinité de solutions,}}$ de la forme,

$$\boxed{(0, 1+z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Exercice 7 – Avec un autre formalisme. Trouver les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y = y + z = z + x$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a,

$$\begin{aligned}
 x + y = y + z = z + x &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = y + z \\ y + z = z + x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le système linéaire admet une infinité de solutions, de la forme

$$\boxed{(z, z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}}$$

Exercice 8 – Vrai/Faux. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple explicite qui illustre la non véracité de l'assertion.

1. On ne change pas les solutions d'un système linéaire en intervertissant deux lignes de ce système.

VRAI.

2. Un système linéaire de deux équations à deux inconnues admet toujours au moins une solution.

FAUX. Par exemple, le système linéaire suivant, de deux équations à deux inconnues, admet aucune solution.

$$\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ -x & - & y & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{cases}$$

3. Une système linéaire de trois équations à trois inconnues ne peut pas admettre une infinité de solutions.

FAUX. Un système linéaire de trois équations à trois inconnues peut admettre une infinité de solutions (cf Question c) de l'Exercice 3).

4. Dans le plan, l'intersection de deux droites est caractérisée par un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

VRAI.

Exercice 9 – Un peu de géométrie. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations données ci-dessous :

$$(P_1) : (1-a)x - 2y + z = 0$$

$$(P_2) : 3x - (1+a)y - 2z = 0$$

$$(P_3) : 3x - 2y - (1+a)z = 0$$

Un point $M(x, y, z)$ est dans l'intersection des trois plans si et seulement si il vérifie le système linéaire suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on peut montrer les propriétés suivantes.

- Si $a \notin \{0, 1, -2\}$, alors,

$$(S) \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Dans ce cas, les plans s'intersectent uniquement au point d'origine du repère et donc, il ne peut pas exister de droite contenue dans les trois plans.

- Si $a = 1$ alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Alors, le système linéaire admet une infinité de solutions, de la forme

$$(z, \frac{1}{2}z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'intersection des trois plans est une droite passant par l'origine et de vecteur directeur $(1, \frac{1}{2}, 1)$.

- Si $a = 0$ alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Alors, le système linéaire admet une infinité de solutions, de la forme

$$(z, z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'intersection des trois plans est une droite passant par l'origine et de vecteur directeur $(1, 1, 1)$.

- Si $a = -2$ alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{3} \\ y = z \end{cases}$$

Alors, le système linéaire admet une infinité de solutions, de la forme

$$(\frac{z}{3}, z, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'intersection des trois plans est une droite passant par l'origine et de vecteur directeur $(\frac{1}{3}, 1, 1)$.

Ainsi, il existe une droite contenue dans les trois plans si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -2$.

Exercice 10 – Oral PSI, Mines-Télécom, 2022. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Soit $m \in \mathbb{R}$. Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ mx + y + z = 1 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ (1-m^2)y + (1-m)z = 1-m^2 & L_2 - mL_2 \\ (1-m)y + (m-1)z = m^2 - m & L_3 - L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $m = 1$, alors

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = -y - z + 1$$

Le système linéaire admet une infinité de solutions, de la forme

$$(-y - z + 1, y, z) \quad \text{pour tout } y, z \in \mathbb{R}$$

- Si $m \neq 1$, alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ (1+m)y + z = 1+m & L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m}L_2 \\ y - z = -m & L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m}L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (1+m)y + z = 1+m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m \\ (2+m)z = (1+m)^2 & L_3 - (1+m)L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $m = -2$ alors,

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m \\ 0 = 1 & L_3 - (1+m)L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne est incompatible. Le système linéaire n'admet pas de solutions.

- Si $m \neq -2$ alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m \\ z = \frac{(1+m)^2}{2+m} & L_3 - (1+m)L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = m \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(1+m)^2}{2+m} & L_3 - (1+m)L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(1+m)^2}{2+m} & L_3 - (1+m)L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système linéaire admet une unique solution, donnée par

$$\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(1+m)^2}{2+m} \right)$$

Exercice 11 – Oral PSI, Mines-Télécom, 2021. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur des paramètres $m, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$$

Soit $m \in \mathbb{R}$. Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ mx + y + mz + t = a \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ (1-m^2)y + (1-m^2)t = a-mb \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $m^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $\boxed{\text{si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -1}$, alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ y + t = \frac{a-mb}{1-m^2} \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m^2} L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ y = \frac{a-mb}{1-m^2} - t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-ma+b}{1-m^2} + 2mt + z \\ y = \frac{a-mb}{1-m^2} - t \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$, de la forme

$$\left(\frac{-ma+b}{1-m^2} + 2mt + z, \frac{a-mb}{1-m^2} - t, z, t \right) \quad \text{pour tout } z, t \in \mathbb{R}$$

- Si $m = 1$ alors,

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ 0 = a - b \end{cases}$$

- Si $a - b \neq 0$, alors la dernière ligne est incompatible et le système linéaire n'admet $\boxed{\text{aucune solution.}}$
- Si $a - b = 0$, alors

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z + t = b \Leftrightarrow x = b - y - z - t$$

Alors, le système admet une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$, de la forme,

$$(b - y - z - t, y, z, t) \quad \text{pour tout } y, z, t \in \mathbb{R}$$

- Si $m = -1$ alors,

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z + mt = b \\ 0 = a + b \end{cases}$$

- Si $a + b \neq 0$, alors la dernière ligne est incompatible et le système linéaire n'admet $\boxed{\text{aucune solution.}}$
- Si $a + b = 0$, alors

$$\begin{cases} mx + y + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases} \Leftrightarrow x - y + z - t = b \Leftrightarrow x = b + y - z + t$$

Alors, le système admet une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$, de la forme,

$$(b + y - z + t, y, z, t) \quad \text{pour tout } y, z, t \in \mathbb{R}$$