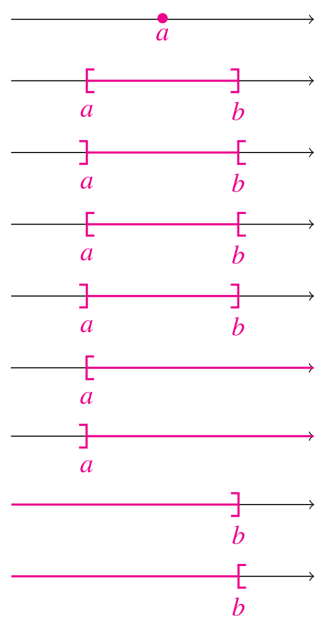
1. Étude qualitative d'une fonction

Pour bien démarrer : les intervalles de $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tout $(a,b) \in I^2$, $[a,b] \subset I$. De façon imagée, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie «sans trous». Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont l'ensemble vide $\varnothing$, l'ensemble $\mathbb{R}$ et les ensembles suivants, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$:

- Les singletons : $\{a\}$
- les intervalles fermés ou segments : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- les intervalles ouverts : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- les intervalles fermés en a, ouverts en b : $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- les intervalles ouverts en a, fermés en b : $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- les demi-droites fermées en a : $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- les demi-droites ouvertes en a : $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- les demi-droites fermées en b : $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- les demi-droites ouvertes en b : $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



Exercice 0.1 Compléter le tableau suivant.

Notation d'intervalle	Inégalité(s) correspondante(s)	Représentation sur une droite
$x \in [-3,5]$		
	$x < 3$	
		
$x \in [2,+\infty[$		
	$-3 < x \leqslant -1$	
	$x \leqslant -5$	
$x \in]-1,1[$		

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1 Le **domaine de définition** d'une fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des réels x tels que le nombre $f(x)$ existe. On dit alors que f est définie sur $\mathcal{D}_f$, et on note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont deux objets de nature mathématique différente.

Objet	Nature mathématique
f	
$f(2)$	
$f(x)$ (pour un x fixé)	

Ainsi, écrire 'la fonction $f(x)$...” n'a pas de sens car $f(x)$ n'est pas une fonction, c'est l'image de x par la fonction f, et donc est un nombre réel. On écrira plutôt “la fonction f...” ou la fonction “$f : x \mapsto f(x)$...”.

Définition 1.2 Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **à valeurs dans** A si

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \in A$$

On note alors souvent

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 1.3 Compléter le tableau suivant.

Fonction	Ensemble de définition	À valeurs dans
$x \mapsto x^2$		
$x \mapsto x$		
$x \mapsto \sin(x)$		
$x \mapsto \exp(x)$		

On pourra utiliser la proposition suivante pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée.

Proposition 1.4 Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit $x \in \mathcal{D}$.

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe $\iff$ $g(x) \neq 0$
- $\sqrt{f(x)}$ existe $\iff$ $f(x) \geq 0$
- $\ln(f(x))$ existe $\iff$ $f(x) > 0$

Étant donnée une fonction f, on commencera toujours par préciser son ensemble de définition si celui-ci n'est pas donné. Pour déterminer l'*ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, il s'agit de trouver l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. Cela amène généralement à résoudre une ou plusieurs (in)équations selon les contraintes données en Proposition 1.4.

Exemple 1.5 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \sqrt{6-3x}.$$

Exemple 1.6 Donner le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

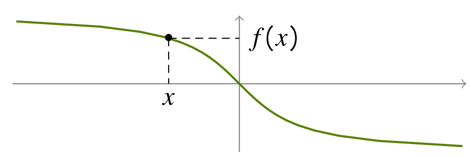
Fonction	Contrainte	$\mathcal{D}_f$
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$		
$x \mapsto \sqrt{x-3}$		
$x \mapsto \ln(2-x)$		
$x \mapsto \ln(x^2-6x+9)$		
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$		

1.2 Représentation graphique

Définition 1.7 La **représentation graphique** d'une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, notée $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, dans un repère orthonormé. Ainsi,

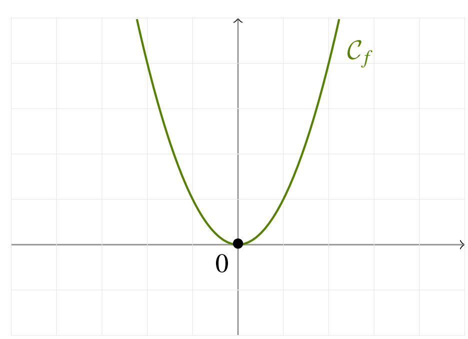
$$M \text{ de coordonnées } (x,y) \text{ appartient à } \mathcal{C}_f \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x)$$

Si $y = f(x)$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, on dit que
- y est l'**image** de x par f,
- x est un **antécédent** de y.

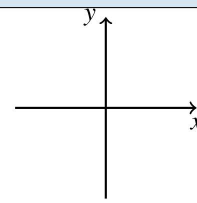
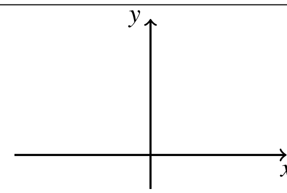
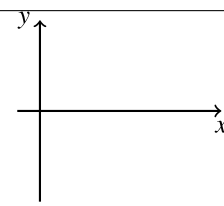
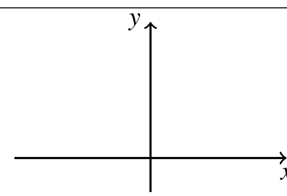
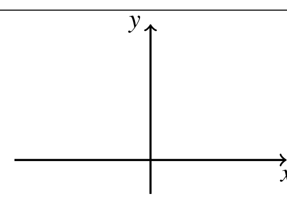
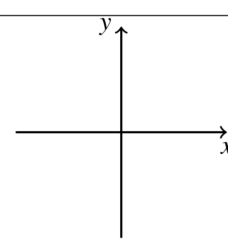
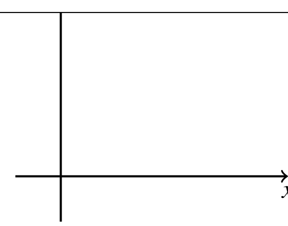


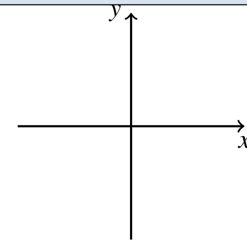
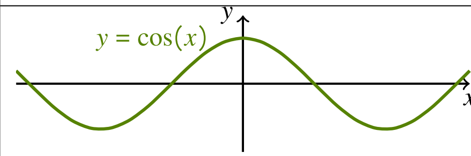
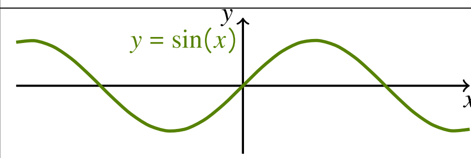
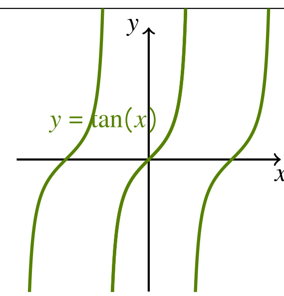
Exemple 1.8 Ci-dessous est représentée la courbe d'une fonction f.

1. Déterminer l'image de 2 par f.
2. Déterminer l'image de 0 par f.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par f.



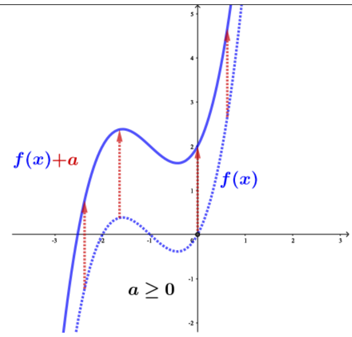
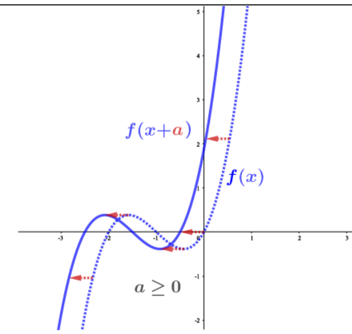
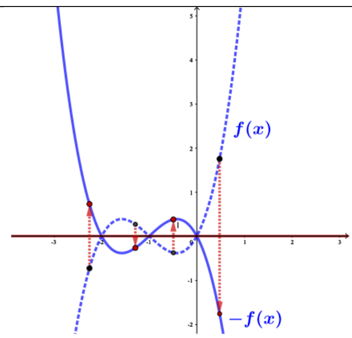
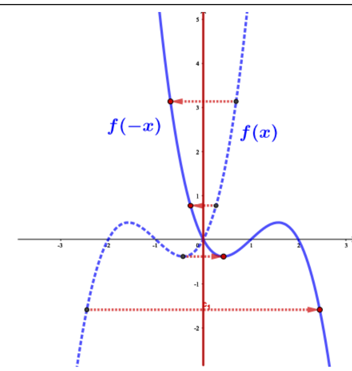
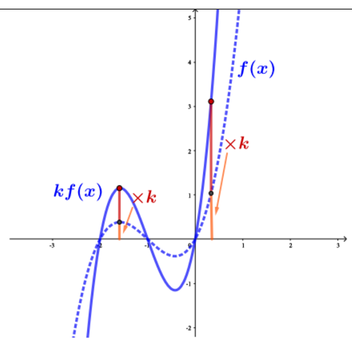
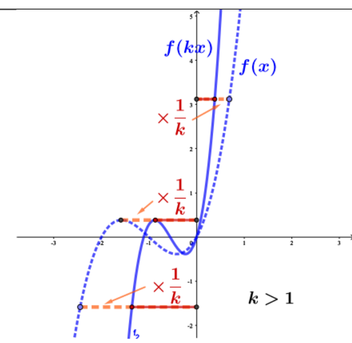
Ci-dessous, on rappelle les ensembles de définition et les représentations graphiques des fonctions usuelles.

Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Identité	$\mathrm{id}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle	$\exp: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$	
Logarithme (népérien)	$\ln: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$	
Valeur absolue	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \lvert x \rvert \end{array}$	
Carré	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$	
Cube	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$	
Racine carrée	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$	

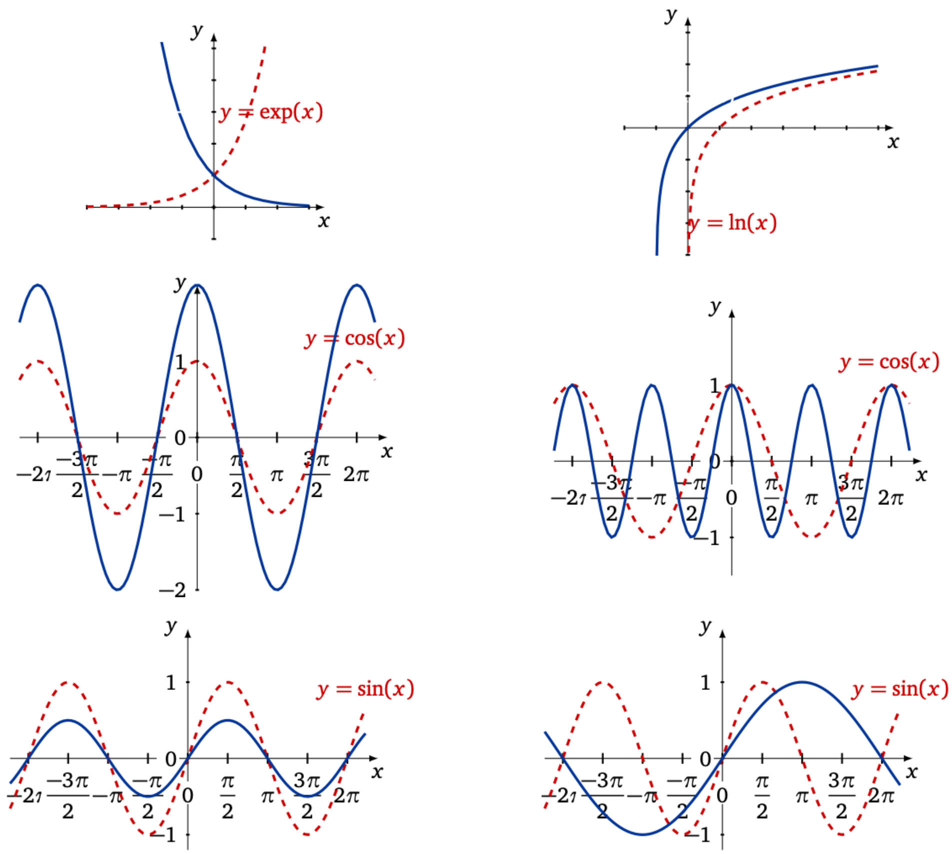
Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Inverse	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$	
Cosinus	$\begin{array}{cccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$	
Sinus	$\begin{array}{cccc} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$	
Tangente	$\begin{array}{cccc} \tan: & \mathcal{D}_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$ où $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	

1.3 Transformations affines d'une représentation graphique

Voyons graphiquement les représentations graphiques de fonctions obtenues par des transformations simples à partir de la représentation graphique d'une fonction f représentée en pointillés.

 Le graphe de $x \longmapsto f(x)+a$ est **translaté verticalement** vers le haut si $a \geq 0$ et vers le bas si $a \leq 0$.	 Le graphe de $x \longmapsto f(x+a)$ est **translaté horizontalement** vers la gauche si $a \geq 0$ et vers la droite si $a \leq 0$.
 Le graphe de $x \longmapsto -f(x)$ est obtenu par **symétrie** par rapport à l'**axe des abscisses**.	 Le graphe de $x \longmapsto f(-x)$ est obtenu par **symétrie** par rapport à l'**axe des ordonnées**.
 Le graphe de $x \longmapsto kf(x)$ est obtenu par **dilatation verticale** de rapport k : le point (x,y) devient (x,ky). Pour $k \in [0,1[$, la courbe s'aplatit verticalement et s'élargit verticalement si $k > 1$.	 Le graphe de $x \longmapsto f(kx)$ est obtenu par **dilatation horizontale** de rapport $1/k$: le point (x,y) devient $((1/k)x,y)$. Pour $k \in [0,1[$, la courbe s'aplatit horizontalement et s'élargit horizontalement si $k < 1$.

Exemple 1.9 Donner les fonctions dont les représentations graphiques sont tracées en trait continu à partir de celles tracées en pointillées ($y = \dots$ correspond à la fonction représentée en pointillés).



1.4 Opérations sur les fonctions

Proposition 1.10 Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom	Notation	Définition
Somme de f et g	$f+g$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Produit de f et g	$f \cdot g$ ou fg	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f\cdot g)(x) = f(x)\times g(x)$
Produit de f et λ	λf	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Quotient de f et g*	$\frac{f}{g}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

*Le quotient de f et g est bien défini que si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

Proposition 1.11 — Composition de fonctions. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Alors la **composée** $g \circ f$ (se lit "g rond f") est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, donnée par

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathcal{D}_f, \quad (g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \\ \mathcal{D}_f \arrow[u, phantom, "\Cap"] & \mathcal{D}_g \arrow[u, phantom, "\Cap"] & \end{tikzcd}$$

Avec les notations de la Proposition précédente, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$. La fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathcal{D}_g$ seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g(x) \in \mathcal{D}_f$. De plus, lorsque les deux fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies, en général, elles ne sont pas égales.

Exemple 1.12 Soient f et g les fonctions données par

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcl} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

2 Rappels sur la dérivée

Le but de cette section est de se re-familiariser avec le **calcul** de **dérivées**, sans rentrer dans les détails de la théorie. La rédaction des exemples peut donc manquer de rigueur qui sera rajoutée par la suite.

2.1 Dérivées usuelles

$\mathcal{D}_f$	Fonction f	$\mathcal{D}_{f'}$	Dérivée f'
	$x \mapsto k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)		$x \mapsto 0$
	$x \mapsto x^\alpha$		$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
	$x \mapsto \ln(x)$		$x \mapsto \frac{1}{x}$
	$x \mapsto \mathrm{e}^x$		$x \mapsto \mathrm{e}^x$
	$x \mapsto \cos(x)$		$x \mapsto -\sin(x)$
	$x \mapsto \sin(x)$		$x \mapsto \cos(x)$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \tan(x)$	$\{\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto 1+\tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$
	$x \mapsto \arctan(x)$		$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
	$x \mapsto \arcsin(x)$		$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$		$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$		$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

2.2 Opérations sur les dérivées

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Exemple 2.1 Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

Fonction	**Dérivée**
$x \mapsto x^2 + \cos(x) + 1$	
$x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	
$x \mapsto \ln(x) \times e^x$	
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	
$x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$	
$x \mapsto \sqrt{x}(5x-3)$	

2.3 Dérivée d'une composée

Proposition 2.2 — Dérivée d'une composée. Soient f une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_g$. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, \qquad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Les formes les plus courantes de dérivées de composées sont les suivantes.

Fonction	Dérivée
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Fonction	Une primitive
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$

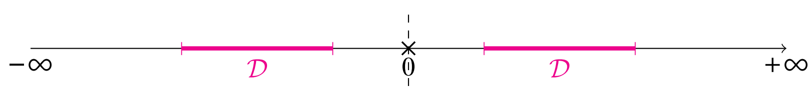
Exemple 2.3 Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

Fonction	**Dérivée**
$x \mapsto \sqrt{2x^2+3x+4}$	
$x \mapsto (6x^2+3x+7)^3$	
$x \mapsto \cos(2x+1)$	
$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$	
$x \mapsto \ln(2x+1)$	

3 Parité/Imparité et Périodicité

Définition 3.1 Une partie de $\mathbb{R}$ est dite **symétrique par rapport à zéro** lorsque

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{D}, \qquad -x \in \mathcal{D}.$$

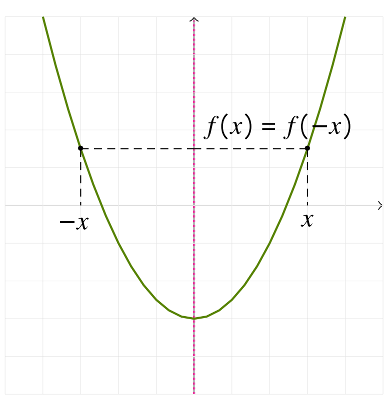


Exemple 3.2

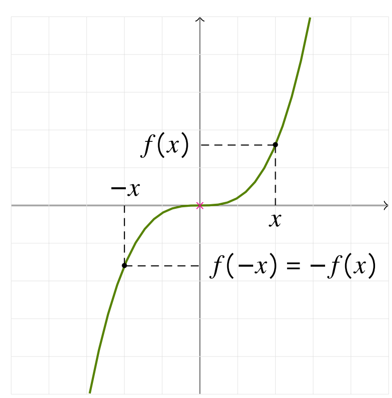
Ensemble	$\mathbb{R}^*$	$]-1,1]$	$]-5,5[$	$[-4,-2]\cup[2,4]$	$]-\infty,-4]\cup[4,9]$
Sym. % à 0					

Définition 3.3 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro. On dit que :

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$,
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.



Représentation d'une fonction *paire* (ici $x \mapsto x^2$) : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Représentation d'une fonction *impaire* (ici $x \mapsto x^3$) : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Comment étudier la *parité* (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$?

- Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0, alors f n'est pas paire.
- Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, alors
  - pour prouver que f est *paire*, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
  - pour prouver que f n'est *pas paire*, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire on trouve un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$.

On peut aussi tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction pour conjecturer la parité de la fonction.

Exercice 3.4 Montrer que la fonction suivante est impaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^5}{x^4+3x^2+1} \end{array}$$

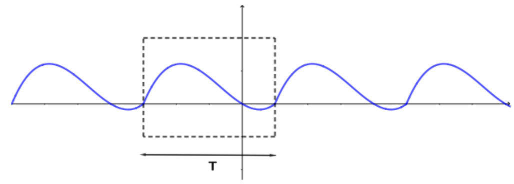
Exercice 3.5 Montrer que la fonction suivante est ni paire ni impaire.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$$

Définition 3.6 — Périodicité. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T > 0$. On dit que f est T**-périodique** si,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

Le nombre T est alors appelé **période**.



Exemple 3.7 On considère la fonction f suivante

$$f : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)+1}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Montrer que f est paire.
4. En déduire un domaine possible d'étude de f.

4 Monotonie

4.1 Définition de la monotonie

Définition 4.1 Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **constante** si

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \qquad f(x) = f(y)$$

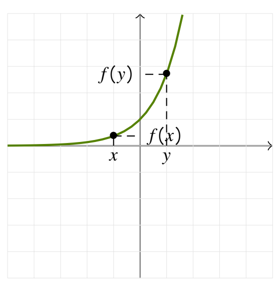
ou de manière équivalente,

$$\exists C \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in \mathcal{D}, \ \ f(x) = C$$

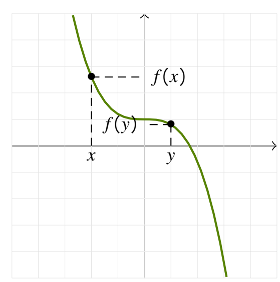
Définition 4.2 Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle de $\mathcal{D}_f$. On dit que f est

Vocabulaire	Définition
croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$
strictement croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$
strictement décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

On dit que f est (strictement) *monotone* sur I si elle est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.



Représentation d'une fonction *croissante* sur $\mathbb{R}$, ici $x \mapsto \exp(x)$.



Représentation d'une fonction *décroissante* sur $\mathbb{R}$, ici $x \mapsto -\frac{2}{10}x^3 + 1$.

Proposition 4.3 — Opérations sur les fonctions monotones. Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I.

- Si f et g sont croissantes sur I (resp. décroissantes) alors $f + g$ est croissante sur I (resp. décroissante).
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  - Si $a > 0$ alors f et af ont le même sens de variation.
  - Si $a < 0$ alors f et af ont des sens de variation contraires.
- On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur I.
  - Si f et g ont la même monotonie alors $f \circ g$ est croissante.
  - Si f et g ont des monotonies opposées alors $f \circ g$ est décroissante.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I. Montrons que $f + g$ est une fonction croissante sur I. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$. Comme f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leqslant f(y) \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqslant g(y).$$

En sommant les deux inégalités, on obtient

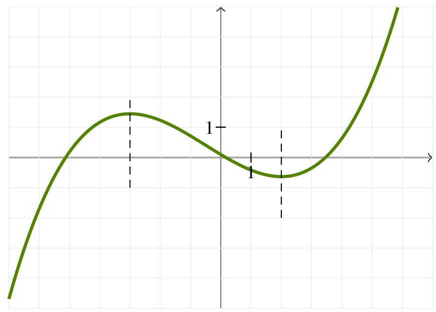
$$f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y),$$

c'est-à-dire

$$(f+g)(x) \leqslant (f+g)(y).$$

Donc la fonction $f + g$ est croissante sur I. ■

Exercice 4.4 Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



4.2 Caractérisation de la monotonie grâce à la dérivée

En pratique, pour des fonctions dérivables, on utilisera le signe de la dérivée pour déterminer la monotonie d'une fonction.

Proposition 4.5 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

Exemple 4.6 — Ecricome ECS 2016. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\text{pour tout } t > 0, \qquad \varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t}$$

Exemple 4.7 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Proposition 4.8 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Si la fonction f vérifie

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) > 0 \qquad \text{sauf éventuellement en un nbre fini de points}$$

alors, la fonction f est *strictement* croissante (resp. décroissante) sur I.

Exemple 4.9 Montrer que la fonction f suivante est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

4.3 Lien entre inégalités et monotonie

On rappelle les règles suivantes.

- *Ajouter* ou *soustraire* un nombre de chaque côté d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Multiplier* chaque côté d'une inégalité par le même *nombre positif* ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Multiplier* chaque côté d'une inégalité par le même *nombre négatif* change le sens de l'inégalité.

Exercice 4.10 Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

La manipulation d'une inégalité est très liée à la monotonie des fonctions de la manière suivante.

- *Composer* une inégalité par une *fonction croissante* ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Composer* une inégalité par une *fonction décroissante* change le sens de l'inégalité.

Exercice 4.11 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 4.12 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{2}$$

5 Majorants, minorants, extrema

Définition 5.1 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition	Sur le graphe
f **minorée** sur $\mathcal{D}$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $y = m$
f **majorée** sur $\mathcal{D}$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $y = M$

On dit que f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire que

$$\underline{\text{il existe}} \text{ deux réels } m, M \text{ tels que } \underline{\text{pour tout}}\ x \in \mathcal{D}, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

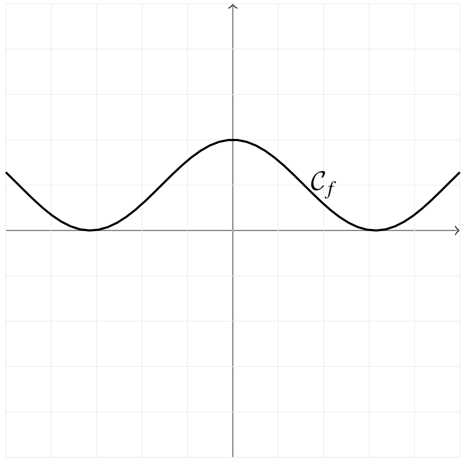
Proposition 5.2 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Alors, la fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

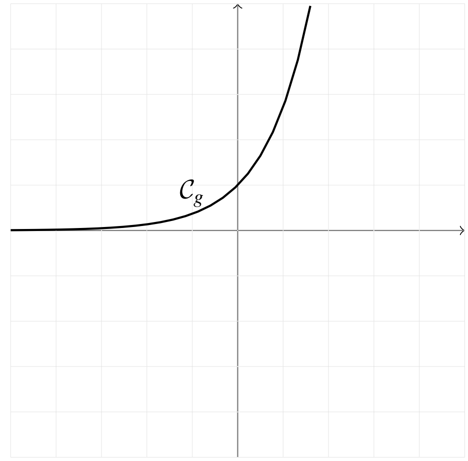
Définition 5.3 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition
On dit que m est <u>le</u> **minimum** de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}, f(x) \geqslant m$ et il existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $m = f(x_0)$
On dit que M est <u>le</u> **maximum** de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}, f(x) \leqslant M$ et il existe $x_1 \in \mathcal{D}$ tel que $M = f(x_1)$

On dit que f admet un *extremum* lorsqu'elle admet soit un minimum, soit un maximum (ou les deux).

? Un minimum (resp. un maximum) est donc un minorant (resp. majorant) atteint par la fonction. On précisera toujours en quelle(s) valeur(s) le minimum (resp. maximum) est atteint.





Attention aux pronoms utilisés, on parle d'un majorant/minimum mais du minimum/maximum.

	Unicité (si existence)
Majorant/minorant	
Maximum/minimum	
Valeur où le min/max est atteint	

Exemple 5.4

Fonction	Minorant	Majorant	Minimum	Maximum
$x \mapsto x^2$				
$x \mapsto x^3$				
$x \mapsto \frac{1}{x}$				
$x \mapsto \ln(x)$				
$x \mapsto \exp(x)$				

Exemple 5.5 Déterminer les éventuels extrema de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$