

8. Nouvelles fonctions usuelles

Pour bien démarrer : des rappels sur les fonctions bijectives

Proposition 0.1 — Théorème de la bijection. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que

- ① L'ensemble I est un **intervalle**.
- ② f est **continue** sur I ,
- ③ f est **strictement monotone** sur I .

Alors, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. On note $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

Proposition 0.2 — Composée de f et f^{-1} . Soit f une fonction bijective de I vers J . Alors,

- a) Pour tout $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$. b) Pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

De plus, pour tout $x \in I$ et $y \in J$, on a

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Proposition 0.3 Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow I$. On suppose que

- ① Pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$.
- ② Pour tout $x \in J$, $f(g(x)) = x$.

Alors, f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par g .

1 Logarithme décimal et en base 2

Définition 1.1

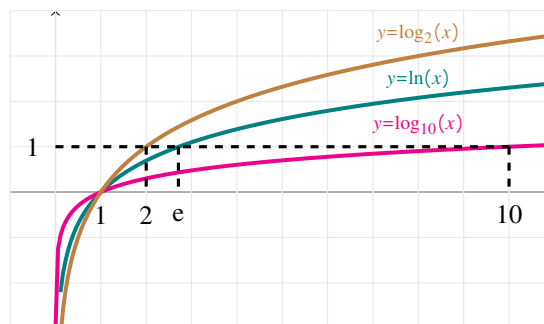
- Le **logarithme décimal**, notée $\log_{10}$ ou $\log$, est la fonction définie par

$$\begin{aligned} \log_{10} : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

- Le **logarithme en base 2**, notée $\log_2$, est la fonction définie par

$$\begin{aligned} \log_2 : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Les graphes du logarithme décimal et en base 2 s'obtiennent par **dilatation verticale** du graphe du logarithme : la courbe s'aplatit verticalement pour le logarithme décimal (car le rapport de la dilatation est $\frac{1}{\ln(10)} < 1$) et s'élargit verticalement pour le logarithme en base 2 (car le rapport de la dilatation est $\frac{1}{\ln(2)} > 1$).



Les règles de calcul de $\ln$ s'étendent au logarithme décimal et au logarithme en base 2. La différence est que

$$\log_{10}(10) = 1 \quad \text{et} \quad \log_2(2) = 1 \quad \text{au lieu de} \quad \ln(e) = 1$$

Le logarithme décimal est utilisé notamment en physique-chimie et le logarithme en base 2 en informatique. L'intérêt de ces deux fonctions est la propriété suivante.

Proposition 1.2 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_{10}(10^n) = n$ et $\log_2(2^n) = n$.

2 Fonctions puissances

2.1 Définition de a^b

Définition 2.1 — Puissances entières. Soit n un entier naturel. On pose,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

En utilisant les propriétés du logarithme, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$$

Cela permet de donner un sens aux puissances non entières.

Définition 2.2 — Puissances réelles. Soit a un réel. On pose,

$$\forall x > 0, x^a = \exp(a \ln(x))$$

La puissance $\frac{1}{2}$ coïncide avec la fonction racine carrée. La puissance -1 coïncide avec la puissance inverse. Les règles de calculs, sont les mêmes pour les puissances entières et pour les puissances réelles : seul le domaine de validité des relations change, une puissance réelle étant définie uniquement pour les entiers strictement positifs.

Proposition 2.3 — Règles de calcul sur les puissances. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^a \times x^b = x^{a+b} & \text{b) } (x^a)^b = x^{a \times b} & \text{c) } \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \\ \text{d) } (x \times y)^a = x^a \times y^a & \text{e) } \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} & \text{f) } x^{-a} = \frac{1}{x^a} \end{array}$$

Exemple 2.4 Calculer les puissances suivantes.

a) $2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{4}} =$

b) $(5^{\frac{1}{4}})^4 =$

c) $2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{4}} =$

d) $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$

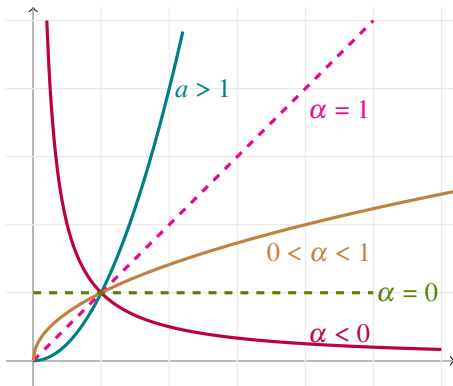
e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1^a =$

f) Pour tout $x > 0$, $x^0 =$

2.2 Fonctions puissances (entières et réelles)

Définition 2.5 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction **puissance** a par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^a = \exp(a \ln(x)) \end{aligned}$$



? Une fonction puissance réelle n'est définie que pour des valeurs strictement positives à cause de la présence du logarithme dans sa définition. Cependant, certaines fonctions puissances s'étendent naturellement à un domaine plus large.

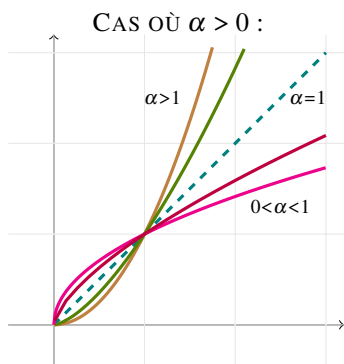
Fonction	Domaine de définition
$x \mapsto x^2$	
$x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$	
$x \mapsto x^{-1}$	

De manière générale,

- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ peut être définie sur $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$, en la prolongeant en 0 par la valeur 0. On parle de **prolongement par continuité** en 0.
- Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{-n}$ peut être définie sur $\mathbb{R}^*$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$.

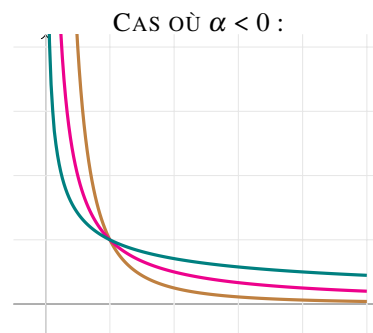
Proposition 2.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f_a : x \mapsto x^a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_a'(x) = ax^{a-1}$$



Par exemple, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, ...

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	1	$+\infty$



Par exemple, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	0

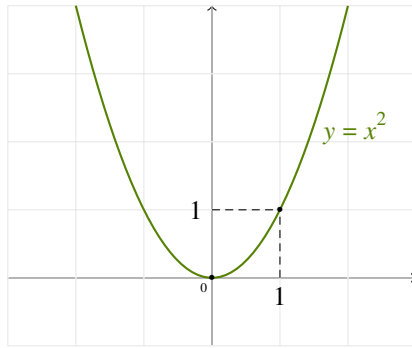
Exemple 2.7 Déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^x$.

Proposition 2.8 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tous $x, y > 0$, on a

$$x^a = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{a}}$$

Exemple 2.9 Résoudre l'équation $x^4 = 16$ d'inconnue $x > 0$.

2.3 Racines n -ièmes



Exemple 2.10 Déterminer si la fonction carrée $x \mapsto x^2$ est bijective de I vers J pour les intervalles donnés ci-dessous.

Départ I	Arrivée J	Bij. de I vers J ?
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	
$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_+$	

Définition 2.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de

- a) $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair, b) $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si n est impair.

Sa bijection réciproque est appelée **racine n -ième**.

- a) Si n est pair :

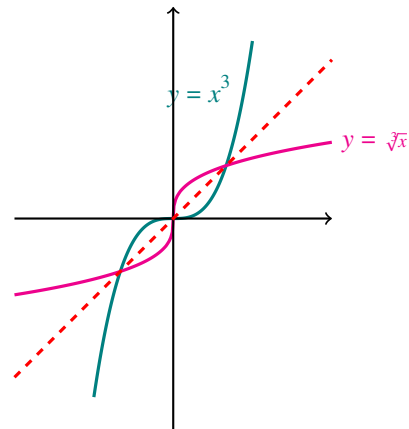
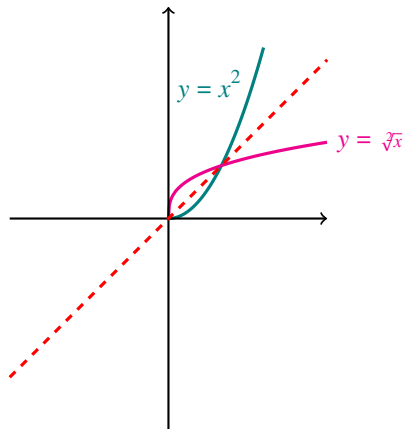
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

- b) Si n est impair :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Proposition 2.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x > 0, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$



Exemple 2.13 Calculer les racines n -ièmes suivantes.

- $\sqrt[3]{8} =$
- $\sqrt[3]{-8} =$
- $\sqrt[4]{81} =$
- $\sqrt[4]{-81} =$

Proposition 2.14 — Composée puissance n et racine n -ième, cas n pair.

a) Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$

b) Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x^n} = x$

De plus, pour tout $x, y \geq 0$, on a,

$$y^n = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt[n]{x}$$

Exemple 2.15 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers naturels le plus petit possible.

a) $\sqrt{1300}$

b) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{75} - 3\sqrt{48}$

Proposition 2.16 — Composée puissance n et racine n -ième, cas n impair.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$

De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a,

$$y^n = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt[n]{x}$$

3 Fonctions hyperboliques : ch et sh

Définition 3.1

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \text{ch} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique**, notée sh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \text{sh} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Proposition 3.2 — Relation fondamentale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Proposition 3.3 — Propriétés de la fonction sh.

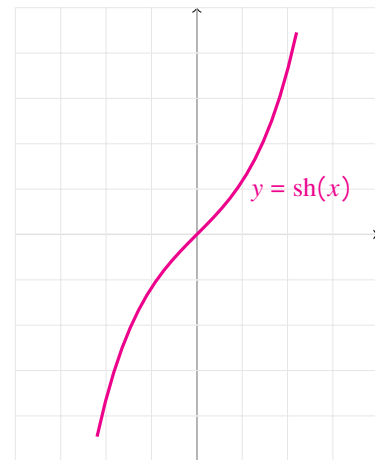
1. On a $\text{sh}(0) = 0$.
2. La fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction sh en $\pm\infty$ sont les suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$$

4. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$$

5. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction sh n'est ni minorée ni majorée sur $\mathbb{R}$.



Proposition 3.4 — Propriétés de la fonction ch.

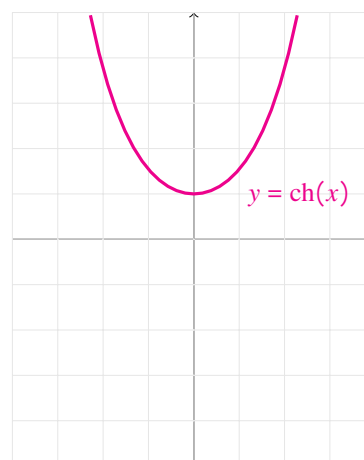
1. On a $\text{ch}(0) = 1$.
2. La fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction ch en $\pm\infty$ sont les suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

4. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,

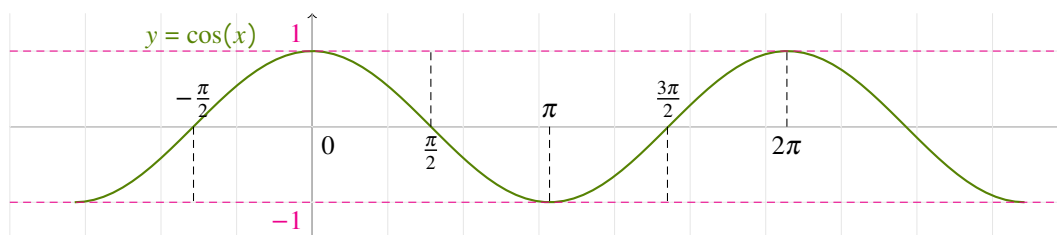
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$$

5. La fonction ch est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
6. La fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et non majorée.



4 Fonctions circulaires réciproques : Arcsin, Arccos, Arctan

4.1 Arcsin

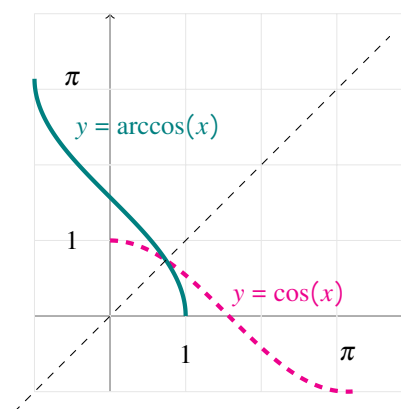


Exemple 4.1 Déterminer si la fonction cosinus est bijective de I vers J pour les intervalles donnés ci-dessous.

Intervalle de départ I	Intervalle d'arrivée J	Bijective de I vers J ?
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	
$[0, \pi]$	$\mathbb{R}$	
$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	
$[\pi, 2\pi]$	$[-1, 1]$	

Définition 4.2 La fonction **arc cosinus**, notée $\arccos$, est la bijection réciproque de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

$$\begin{array}{rcl} \arccos & : & [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$



? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\theta = \arccos(x)$ est l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ dont le cosinus vaut x , c'est-à-dire $\cos(\theta) = x$.

Exemple 4.3 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction $\arccos$.

$\arccos(0) =$	
$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	
$\arccos(-1) =$	
$\arccos(1) =$	

Proposition 4.4 — Composée de cos et arccos.

- a) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ b) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in [-1, 1]$ et $x \in [0, \pi]$,

$$y = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(y)$$



Il faut faire très attention aux domaines de validité des relations précédentes. En effet,

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

Exemple 4.5 Montrer que,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Proposition 4.6 — Dérivée de arccos. La fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et

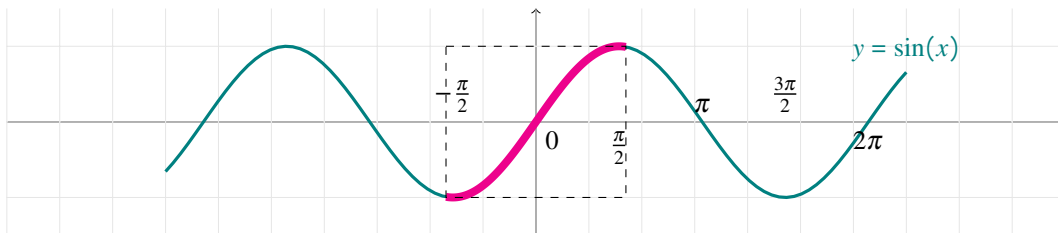
$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $] -1, 1[$, alors la fonction $x \mapsto \arccos(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$x \mapsto -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$$

4.2 Arcsin



Définition 4.7 La fonction **arc sinus**, notée arcsin, est la bijection réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{array}{lcl} \arcsin & : & [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & & x \mapsto \arcsin(x) \end{array}$$

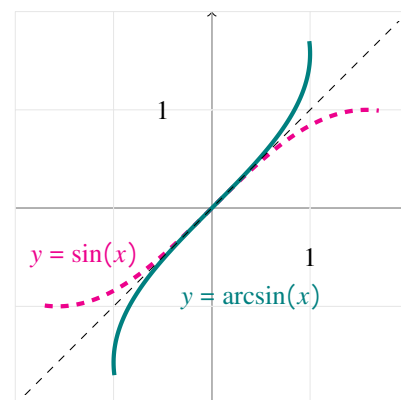
Démonstration. On sait que

- L'ensemble $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est un intervalle
- La fonction sin est **continue** sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- La fonction sin est **strictement croissante** sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**,

sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$

et on note $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa bijection réciproque. ■



? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\theta = \arcsin(x)$ est l'unique angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x , c'est-à-dire $\sin(\theta) = x$.

Exemple 4.8 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction arcsin.

$\arcsin(0) =$	
$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	
$\arcsin(-1) =$	
$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) =$	

Proposition 4.9 — Composée de sin et arcsin.

a) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ b) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in [-1, 1]$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$y = \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(y)$$

Proposition 4.10 — Dérivée de arcsin. La fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

? De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $] -1, 1[$, alors la fonction $x \mapsto \arcsin(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

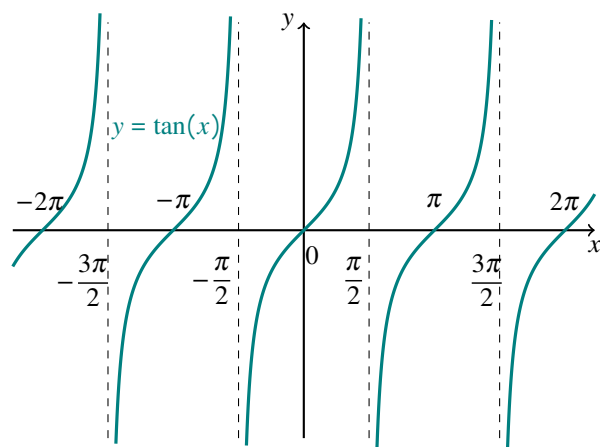
$$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Exercice 4.11 Montrer que,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Proposition 4.12 La fonction arcsin est impaire (sur $[-1, 1]$).

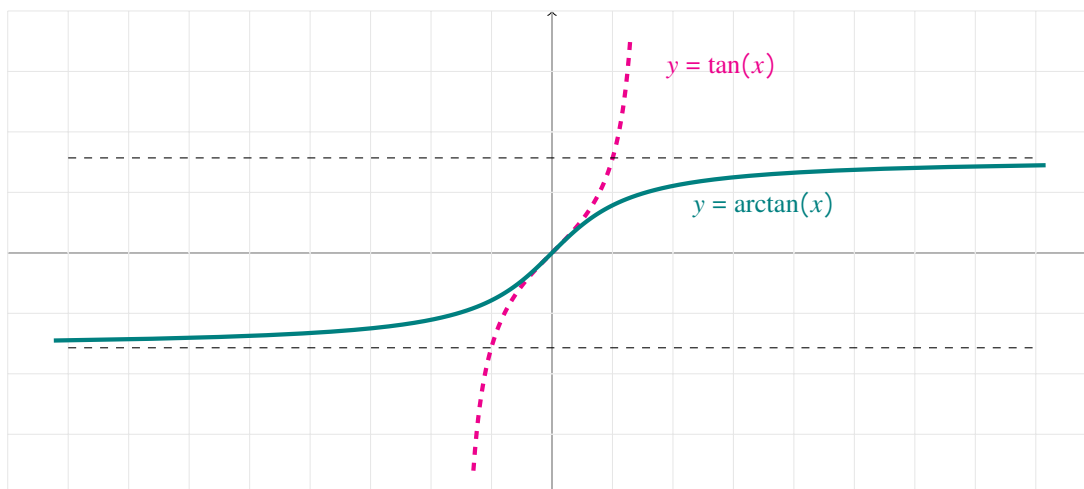
4.3 Arctan



On peut montrer, grâce au **théorème de la bijection**, que la fonction tangente, réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 4.13 La fonction **arc tangente**, notée $\arctan$, est la bijection réciproque de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned} \arctan &: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$



? Ainsi, par construction, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\theta = \arctan(x)$ est l'unique angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x , c'est-à-dire $\tan(\theta) = x$.

Exemple 4.14 Déterminer l'image des valeurs suivantes par la fonction $\arcsin$.

$\arctan(1) =$	
$\arctan(-1) =$	
$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$	

Proposition 4.15 — Composée de sin et arcsin.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$

b) Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$$

Proposition 4.16 La fonction $\arctan$ est impaire (sur $\mathbb{R}$).

Proposition 4.17 — Dérivée de arcsin. La fonction $\arctan$ est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

? De manière générale, si u est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \arctan(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Preuve du caractère dérivable.

Montrons que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.

- La fonction $\tan$ est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La dérivée de $\tan$ (qui est $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ ou encore $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$) ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Alors, (cf Proposition 2.10 du Chapitre 4), la fonction $\arctan$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

en utilisant l'Exemple 4.5. ■