TD 08 – Nouvelles fonctions usuelles

1 Fonctions puissances

Exercice 1 – Rappel sur les puissances entières. Dire si les règles de calculs suivantes sont vraies. On ne se souciera pas des domaines de validité des relations. En cas de doute, on pourra tester sur des valeurs particulières. Lorsque les relations sont fausses, rectifier l'égalité en donnant la bonne relation.

a) $(a^b)^c = a^{bc}$ b) $a^b a^c = a^{bc}$ c) $a^{2b} = (a^b)^2$

d) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ e) $(a^b)^c = a^{b^c}$ f) $(a^b)^c = (a^c)^b$

Exercice 2 – Rappel sur les puissances entières. Sélectionner la (ou les) réponse(s) exacte(s).

1. $5^7 \times (5^3)^2$ est égal à

   a) $5^7 \times 5^5$ b) $5^7 \times 5^6$ c) 5^{13}

2. $\frac{(-3)^5}{3^7 \times 3}$ est égal à

   a) -3^{-3} b) 3^{-3} c) $-\frac{1}{3^3}$

3. Pour tous réels a et b non nuls, $\frac{ab^6}{(ab)^4}$ est égal à

   a) $\frac{1}{a^2b^2}$ b) $a^{-4}b^2$ c) $a^{-3}b^2$

4. Pour tous réels a et b non nuls, $\left(\frac{a^2}{a \times b^3}\right)^4 \times b$ est égal à

   a) a^4b^{-11} b) $\frac{a^7}{b^{11}}$ c) $\frac{a^4}{b^{12}} \times b$

Exercice 3 – Rappel sur les puissances entières. Calculer A et B sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

$$A = \frac{5^7 \times 10^{-4} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}} \quad \text{et} \quad B = \frac{(-6)^4 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^3}$$

Exercice 4 – Puissances non entières. Écrire sous forme d'une exponentielle les nombres suivants. On précisera à chaque fois le domaine de validité de l'égalité.

a) 3^{-x} b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$ c) x^x d) $(1+x)^n$

Exercice 5 – Puissances non entières. En utilisant les règles de calcul sur les puissances, simplifier les quantités suivantes.

a) $9^{\frac{7}{2}} \times 9^{-\frac{5}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{4}} \times 32^{\frac{1}{4}}$ c) $(5^{\frac{1}{5}})^5$

Exercice 6 – Puissances non entières. Simplifier les quantités suivantes après avoir précisé pour quelles valeurs de x elles sont bien définies. *On pourra passer par la forme exponentielle.*

a) $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ b) $\mathrm{e}^{-2\ln(1+x^2)}\sqrt{1+x^2}$

c) a^b pour $a = \exp(x^2)$ et $b = \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}$

Exercice 7 – Étude de fonctions puissances. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 2^x + x^2$ b) $x \mapsto 5^{x^2+1}$

c) $x \mapsto (1+\sin(x))^{\cos(x)}$

Exercice 8 – Racines n-ièmes. Simplifier les quantités suivantes.

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{2^4}\sqrt[3]{2^6}$

c) $27^{\frac{5}{3}}$ d) $\frac{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^5}}$

Exercice 9 – Étude de fonctions racines n-ièmes. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ c) $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

Exercice 10 – Résolution d'équations puissances. Résoudre les équations suivantes en précisant le domaine de validité de l'équation.

a) $10^x = 5$ b) $5^{2x} - 1 = 0$

c) $2^{x^3} = 3^{x^2}$ d) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

2 Fonctions hyperboliques

Exercice 11 – Simplifications grâce à la définition. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Calculer $\mathrm{sh}(\ln 3)$.
2. Calculer $\mathrm{ch}(-\ln 2))$.
3. Simplifier, pour tout $x > 0$ la quantité

$$\frac{\mathrm{ch}(\ln(x)) + \mathrm{sh}(\ln(x))}{x}$$

Exercice 12 – Simplifications grâce à la définition.

1. Simplifier, pour tout $x \in [1, +\infty[$, l'expression

$$\mathrm{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2-1}))$$

2. Simplifier, pour tout $y \in [0, +\infty[$, l'expression

$$\ln(\mathrm{ch}(x) + \sqrt{(\mathrm{ch}\,x)^2 - 1})$$

3. Que peut-on en déduire sur les fonctions impliquées ?

Exercice 13 – Propriétés de la fonction ch. Démontrer les propriétés suivantes de la fonction ch.

1. On a $\mathrm{ch}(0) = 1$.
2. La fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction ch en $\pm\infty$ sont les suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

4. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$$

5. La fonction ch est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
6. La fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et non majorée.

Exercice 14 – Formules de trigonométrie hyperboliques.

1. (a) Rappeler la formule de trigonométrie permettant d'exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Démontrer la formule analogue de trigonométrie hyperbolique :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$$
2. (a) Rappeler la formule de trigonométrie permettant d'exprimer, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   (b) Démontrer la formule analogue de trigonométrie hyperbolique :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

Exercice 15 – Dérivation. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \mathrm{ch}(x)\cos(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x)$

b) $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ c) $x \mapsto \mathrm{ch}(x)^x$

d) $x \mapsto \ln\left(\frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1-\mathrm{sh}(x)}\right)$

Exercice 16 – Étude de fonction. On considère la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 17 – Calcul de sommes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes. *On pourra commencer par calculer $S+T$ et $S-T$.*

$$S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(2k+1) \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(2k+1)$$

Exercice 18 – Équations & Inéquation. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivant(e)s :

a) $\mathrm{ch}(x) = 3$ b) $\mathrm{sh}(x) \geq 3$

c) $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$

On pourra se ramener à la forme exponentielle et trouver une équation vérifiée par X.

3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 19 – Calculs de valeurs particulières. Calculer les quantités suivantes.

a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$ d) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

e) $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ f) $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

g) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ h) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

i) $\arcsin(\sin(4\pi))$

Exercice 20 – Dérivation. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \arccos(2x+3)$ b) $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

c) $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 21 – Simplifier les expressions suivantes après avoir précisé leur intervalle de définition.

a) $\cos(2\arccos(x))$ b) $\cos(\arcsin(x))$

c) $\tan(\arcsin(x))$ d) $\sin(\arccos(x))$

e) $\cos(\arctan(x))$ f) $\sin(\arctan(x))$

Exercice 22 – Oral Mines-Ponts MP 2021. Pour quelles valeurs de α, la fonction $x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ est-elle polynomiale ?

Exercice 23 – Raisonnement par analyse-synthèse. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

On va pour cela raisonner par analyse-synthèse.

1. *Analyse.* Soit x une solution de (E). Montrer que x est une solution de $2x^2 + 3x - 1 = 0$. En déduire les valeurs possible de x.
2. *Synthèse.* Les valeurs trouvées à la question précédente sont-elles des solutions de (E) ?

Exercice 24 – Attention à l'intervalle.... *On rappelle que toute fonction dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur le-dit intervalle.* On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que la dérivée de f est nulle sur son domaine de définition.
3. En déduire une expression plus simple de f grâce au rappel. *Attention, il y a un piège...*

Exercice 25 – Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra s'appuyer sur des arguments de parité/périodicité pour simplifier le problème).

Exercice 26 – Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x)$$

de deux manières différentes :

1. en considérant une fonction judicieusement choisie,
2. par le calcul

Exercice 27 – Soit $A = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. Montrer que $A \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
2. Calculer $\tan(A)$.
3. En déduire que $A = \frac{3\pi}{4}$.