

TD 08 – Nouvelles fonctions usuelles

1 Fonctions

puissances

Exercice 1 – Rappel sur les puissances entières. Dire si les règles de calculs suivantes sont vraies. On ne se souciera pas des domaines de validité des relations. En cas de doute, on pourra tester sur des valeurs particulières. Lorsque les relations sont fausses, rectifier l'égalité en donnant la bonne relation.

a) $(a^b)^c = a^{bc}$ Vrai.

b) $a^b a^c = a^{bc}$ Faux : $a^b \times a^c = a^{b+c}$

c) $a^{2b} = (a^b)^2$ Vrai.

d) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ Faux : $(ab)^c = a^c \times b^c$

e) $(a^b)^c = a^{b^c}$ Faux : $(a^b)^c = a^{bc}$

f) $(a^b)^c = (a^c)^b$ Vrai.

Exercice 2 – Rappel sur les puissances entières. Sélectionner la (ou les) réponse(s) exacte(s).

1. $5^7 \times (5^3)^2$ est égal à

a) $5^7 \times 5^5$

b) $5^7 \times 5^6$

c) 5^{13}

2. $\frac{(-3)^5}{3^7 \times 3}$ est égal à

a) -3^{-3}

b) 3^{-3}

c) $-\frac{1}{3^3}$

3. Pour tous réels a et b non nuls, $\frac{ab^6}{(ab)^4}$ est égal à

a) $\frac{1}{a^2b^2}$

b) $a^{-4}b^2$

c) $a^{-3}b^2$

4. Pour tous réels a et b non nuls, $\left(\frac{a^2}{a \times b^3}\right)^4 \times b$ est égal à

a) a^4b^{-11}

b) $\frac{a^7}{b^{11}}$

c) $\frac{a^4}{b^{12}} \times b$

Exercice 3 – Rappel sur les puissances entières. Calculer A et B sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

$$A = \frac{5^7 \times 10^{-4} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}} \text{ et } B = \frac{(-6)^4 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^3}$$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \frac{5^7 \times 10^{-4} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}} \\ &= 5^{7-10} \times 10^{-4-(-5)} \times 3^{9-7} \\ &= 5^{-3} \times 10^1 \times 3^2 \\ &= 5^{-3} \times 2 \times 5 \times 3^2 \\ \boxed{&= 2 \times 5^{-2} \times 3^2} \end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned} \boxed{B} &= \frac{(-6)^4 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^3} \\ &= -\frac{6^4 \times 15^4 \times 16^3}{25 \times 12^3} \\ &= -\frac{(2 \times 3)^4 \times (3 \times 5)^4 \times (2^4)^3}{5^2 \times (2^2 \times 3)^3} \\ &= -\frac{2^{16} \times 3^8 \times 5^4}{5^2 \times 2^6 \times 3^3} \\ \boxed{&= -2^{10} \times 3^5 \times 5^2} \end{aligned}$$

Exercice 4 – Puissances non entières. Écrire sous forme d’une exponentielle les nombres suivants. On précisera à chaque fois le domaine de validité de l’égalité.

L’exercice repose sur l’égalité suivante (qui découle des règles sur le logarithme/exponentielle) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \quad x^a = \exp(\ln(x^a)) = \exp(a \ln(x)).$$

- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3^{-x} = \exp(-x \ln(3))$
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \exp\left(\frac{2}{x} \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$
- c) Pour tout $x > 0$, $x^x = \exp(x \ln(x))$
- d) Pour tout $x > -1$, $(1+x)^n = \exp(n \ln(1+x))$

Exercice 5 – Puissances non entières. En utilisant les règles de calcul sur les puissances, simplifier les quantités suivantes.

a) $9^{\frac{7}{2}} \times 9^{-\frac{5}{2}} = 9^{\frac{7}{2} - \frac{5}{2}} = \boxed{9}$

b) $8^{\frac{1}{4}} \times 32^{\frac{1}{4}} = (8 \times 32)^{\frac{1}{4}} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = \boxed{4}$

c) $(5^{\frac{1}{5}})^5 = \boxed{5}$

Exercice 6 – Puissances non entières. Simplifier les quantités suivantes après avoir précisé pour quelles valeurs de x elles sont bien définies. *On pourra passer par la forme exponentielle.*

L'exercice repose sur l'égalité suivante (qui découle des règles sur le logarithme/exponentielle) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \quad x^a = \exp(\ln(x^a)) = \exp(a \ln(x)).$$

a) Pour tout $x > 1$, on a,

$$\boxed{x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \times \ln(x)\right) = \exp(\ln(\ln(x))) \boxed{= \ln(x)}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a,

$$\begin{aligned} \boxed{e^{-2\ln(1+x^2)} \sqrt{1+x^2}} &= e^{-2\ln(1+x^2)} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-2\ln(1+x^2)} \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{3}{2} \ln(1+x^2)\right) \\ &= \exp\left(\ln((1+x^2)^{-\frac{3}{2}})\right) \\ &= (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

c) Soit $x > 0$. Tout d'abord,

$$a^b = \exp(b \ln(a))$$

Or,

$$\ln(a) = \ln(\exp(x^2)) = x^2$$

et de plus,

$$b = \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x} = \frac{\frac{1}{x} \ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{a^b} = \exp(b \ln(a)) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x^2} \times x^2\right) = \exp(\ln(x)) \boxed{= x}$$

Exercice 7 – Étude de fonctions puissances. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 2^x + x^2$

La fonction $f : x \mapsto 2^x + x^2$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2^x + x^2 = \exp(x \ln(2)) + x^2$$

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \ln(2) \exp(x \ln(2)) + 2x = \ln(2) 2^x + 2x}$$

b) $x \mapsto 5^{x^2+1}$

La fonction $x \mapsto 5^{x^2+1}$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 5^{x^2+1} = \exp((x^2 + 1) \ln(5))$$

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x \ln(5) \exp((x^2 + 1) \ln(5)) = 2x \ln(5) 5^{x^2+1}}$$

c) $x \mapsto (1 + \sin(x))^{\cos(x)}$

La fonction $x \mapsto (1 + \sin(x))^{\cos(x)}$ est définie sur $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$:

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = (1 + \sin(x))^{\cos(x)} = \exp(\cos(x) \ln(1 + \sin(x)))$$

car

$$1 + \sin(x) > 0 \iff \sin(x) \neq -1 \iff x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\begin{aligned} \boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x)} &= \left[-\sin(x) \ln(1 + \sin(x)) + \cos(x) \times \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \right] \exp(\cos(x) \ln(1 + \sin(x))) \\ &= \left[-\sin(x) \ln(1 + \sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{1 + \sin(x)} \right] (1 + \sin(x))^{\cos(x)} \end{aligned}$$

Exercice 8 – Racines n-ièmes. Simplifier les quantités suivantes.

a) $\boxed{\sqrt[4]{81} = 3}$ car 3 est strictement positif et $3^4 = 81$.

b) On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\sqrt[3]{2^4} \sqrt[3]{2^6}} &= (2^4)^{\frac{1}{3}} \times (2^6)^{\frac{1}{3}} = (2^4 \times 2^6)^{\frac{1}{3}} = (2^{10})^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \boxed{8\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

c) $\boxed{27^{\frac{5}{3}}} = (3^3)^{\frac{5}{3}} = 3^5 = \boxed{243}$

d) On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^5}}} &= \frac{x^1 \times x^{\frac{1}{2}} \times (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(x^5)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}{x^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{2}}} \\ &= x^{-\frac{3}{4}} \\ &= \boxed{\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}}\end{aligned}$$

Exercice 9 – Étude de fonctions racines n-ièmes. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Comme 3 est impair, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

et la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x)} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}}$$

b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$

Comme 5 est impair, la fonction $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ est définie lorsque

$$\sqrt[5]{x+1} \neq 0 \iff x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$$

Ainsi, la fonction f est définie et dérivable sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x)} = -\frac{1}{5(1+x)^{\frac{6}{5}}}$$

c) $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

De même, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ est définie et dérivable sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f'(x)} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

Exercice 10 – Résolution d'équations puissances. Résoudre les équations suivantes en précisant le domaine de validité de l'équation.

a) $10^x = 5$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} 10^x = 5 &\iff \exp(x \ln(10)) = 5 \\ &\iff x \ln(10) = \ln(5) \\ &\iff x = \frac{\ln 5}{\ln 10} \end{aligned}$$

b) $5^{2x} - 1 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} 5^{2x} - 1 = 0 &\iff 5^{2x} = 1 \\ &\iff \exp(2x \ln(5)) = 1 \\ &\iff 2x \ln 5 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

c) $2^{x^3} = 3^{x^2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} &\iff \exp(x^3 \ln 2) = \exp(x^2 \ln(3)) \\ &\iff x^3 \ln 2 = x^2 \ln 3 \\ &\iff x^2(x \ln 2 - \ln 3) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x \ln 2 - \ln 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

d) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Soit $x > 0$. On a,

$$\begin{aligned}
 \boxed{x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x} &\iff \exp(\sqrt{x} \ln(x)) = \exp(x \ln(\sqrt{x})) \\
 &\iff \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x}) \\
 &\iff \sqrt{x} \ln(x) = x \times \frac{1}{2} \ln(x) \\
 &\iff \ln(x) \times \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \\
 &\iff \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \\
 &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{car } x > 0 \\
 &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4x = 0 \\
 &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad \cancel{x=0} \text{ ou } x = 4 \quad \text{car } x > 0 \\
 &\boxed{\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4}
 \end{aligned}$$

2 Fonctions

hyperboliques

Exercice 11 – Simplifications grâce à la définition. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer $\text{sh}(\ln 3)$.

On a,

$$\boxed{\text{sh}(\ln(3))} = \frac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{e^{\ln(3)} - e^{\ln(\frac{1}{3})}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

2. Calculer $\text{ch}(-\ln 2)$.

On a,

$$\boxed{\text{ch}(\ln(2))} = \frac{e^{-\ln(2)} + e^{\ln(2)}}{2} = \frac{e^{\ln(\frac{1}{2})} + e^{\ln(2)}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} = \frac{5}{4}$$

3. Simplifier, pour tout $x > 0$ la quantité

$$\frac{\text{ch}(\ln(x)) + \text{sh}(\ln(x))}{x}$$

Soit $x > 0$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{\text{ch}(\ln(x)) + \text{sh}(\ln(x))}{x}} &= \frac{\frac{e^{\ln(x)} + e^{-\ln(x)}}{2} + \frac{e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)}}{2}}{x} \\ &= \frac{x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

Exercice 12 – Simplifications grâce à la définition.

1. Simplifier, pour tout $x \in [1, +\infty[$, l'expression

$$\operatorname{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$$

Soit $x \in [1, +\infty[$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))} &= \frac{e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} + e^{-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}}{2} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}}}{2} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1}}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{2x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= x \end{aligned}$$

2. Simplifier, pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'expression

$$\ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{(\operatorname{ch}(x))^2 - 1})$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors:

$$\begin{aligned} \ln\left(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{(\operatorname{ch}(x))^2 - 1}\right) &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - 4}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 4}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \left|\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right|\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + |\operatorname{sh}(x)|\right) \end{aligned}$$

Or $x \in \mathbb{R}_+$ donc $\text{sh}(x) \geq 0$, et $|\text{sh}(x)| = \text{sh}(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{\ln \left(\text{ch}(x) + \sqrt{(\text{ch} x)^2 - 1} \right)} &= \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \text{sh}(x) \right) \\ &= \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \ln(e^x) \\ &= \boxed{x} \end{aligned}$$

3. Que peut-on en déduire sur les fonctions impliquées ?

On définit

$$\begin{array}{ccc} f : [1, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : [0, +\infty[& \rightarrow & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array}$$

Alors, d'après les questions précédentes,

$$\forall x \in [1, +\infty[, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \text{ch} \left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) = x$$

c'est-à-dire $g \circ f = \text{id}$. De même, $f \circ g = \text{id}$. Ceci prouve que les fonctions f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 13 – Propriétés de la fonction ch. Démontrer les propriétés suivantes de la fonction ch.

1. On a $\text{ch}(0) = 1$.
2. La fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Les limites de la fonction ch en $\pm\infty$ sont les suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

4. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$$

5. La fonction ch est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
6. La fonction ch est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et non majorée.

1. On a,

$$\boxed{\text{ch}(0)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = \boxed{1}$$

2. Montrons que ch est paire sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord, le domaine de définition de ch, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\boxed{\text{ch}(-x)} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{\text{ch}(x)}$$

3. On sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc, par somme,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty}$$

4. On admet que la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée est donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x)} = \frac{1}{2} (e^x + (-e^{-x})) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \boxed{\text{sh}(x)}$$

5. On a le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$	$-$	0	$+$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

6. La fonction ch n'est pas majorée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$. Cependant, d'après le tableau de variations, la fonction ch est minorée par 1.

Exercice 14 – Formules de trigonométrie hyperboliques.

1. (a) Rappeler la formule de trigonométrie permettant d'exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$$

- (b) Démontrer la formule analogue de trigonométrie hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)} &= 2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2}{4} (e^{2x} - e^x e^{-x} + e^{-x} e^x - e^{-2x}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{2x} - 1 + 1 - e^{-2x}) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \boxed{\operatorname{sh}(2x)}. \end{aligned}$$

2. (a) Rappeler la formule de trigonométrie permettant d'exprimer, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.

$$\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

- (b) Démontrer la formule analogue de trigonométrie hyperbolique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b)$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b)} &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + \cancel{e^{a-b}} + \cancel{e^{-a+b}} + e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{-a+b}} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} \\ &= \boxed{\operatorname{ch}(a+b)}. \end{aligned}$$

Exercice 15 – Dérivation. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \operatorname{ch}(x) \cos(x) + \operatorname{sh}(x) \sin(x)$

La dérivée de $x \mapsto \operatorname{ch}(x) \cos(x) + \operatorname{sh}(x) \sin(x)$ est la fonction

$$x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) \cos(x)$$

b) $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$

La dérivée de $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

c) $x \mapsto \operatorname{ch}(x)^x$

On peut remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x)^x = \exp(x \ln(\operatorname{ch}(x)))$$

La dérivée de $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x)^x$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_3(x) = \left(\ln(\operatorname{ch}(x)) + \frac{x \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right) \exp(x \ln(\operatorname{ch}(x))) = \left(\ln(\operatorname{ch}(x)) + \frac{x \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right) \operatorname{ch}(x)^x$$

d) $x \mapsto \ln\left(\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)}\right)$

La dérivée de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)}\right)$ est donnée par

$$\forall x \in (\dots), \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)}} \times \frac{\operatorname{ch}(x)(1-\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{ch}(x)(1+\operatorname{sh}(x))}{(1-\operatorname{sh}(x))^2} = \frac{2\operatorname{ch}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)^2}$$

Exercice 16 – Étude de fonction. On considère la fonction $f : x \mapsto x \operatorname{ch}(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ sont définies sur $\boxed{\mathbb{R}}$, donc par produit, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Dresser le tableau de variations complet de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{ch}(x) + x \operatorname{sh}(x)$$

Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) > 0$$

De plus,

$$\forall x \geq 0, \quad \operatorname{sh}(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad \forall x \geq 0, \quad x \operatorname{sh}(x) \geq 0$$

et

$$\forall x \leq 0, \quad \operatorname{sh}(x) \leq 0 \quad \text{donc} \quad \forall x \leq 0, \quad x \operatorname{sh}(x) \geq 0$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \operatorname{sh}(x) \geq 0$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $+\infty$ 

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

et de même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 17 – Calcul de sommes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes. On pourra commencer par calculer $S + T$ et $S - T$.

$$S = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(2k+1) \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(2k+1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned} S + T &= \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(2k+1) + \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^n [\operatorname{ch}(2k+1) + \operatorname{sh}(2k+1)] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{e^{2k+1} + e^{-(2k+1)}}{2} + \frac{e^{2k+1} - e^{-(2k+1)}}{2} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n e^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n e \cdot e^{2k} \\ &= e \sum_{k=0}^n e^{2k} \\ &= e \sum_{k=0}^n (e^2)^k \\ &= e \frac{1 - (e^2)^{n+1}}{1 - e^2} \\ &= e \cdot \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} \end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}
S - T &= \sum_{k=0}^n [\text{ch}(2k+1) - \text{sh}(2k+1)] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\frac{e^{2k+1} + e^{-(2k+1)}}{2} - \frac{e^{2k+1} - e^{-(2k+1)}}{2} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^n e^{-2k-1} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n e^{-2k} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n (e^{-2})^k \\
&= \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{1 - e^{-2}} \\
&= \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e^2}} \\
&= \frac{1}{e} \frac{e^{2n+2} - 1}{e^{2n+2} - e^{2n}} \\
&= \frac{1}{e} \frac{e^{2n+2} - 1}{e^{2n}(e^2 - 1)} \\
&= \frac{1}{e^{2n+1}} \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} S + T = e \cdot \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} \\ S - T = \frac{1}{e^{2n+1}} \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2S = e \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} + \frac{1}{e^{2n+1}} \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} & (L_1 + L_2) \\ 2T = e \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} - \frac{1}{e^{2n+1}} \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2} & (L_1 - L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{S = \frac{1 - e^{4n+4}}{2e^{2n+1}(1 - e^2)}} \\ \boxed{T = \frac{(e^{2n+2} - 1)^2}{2e^{2n+1}(e^2 - 1)}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 18 – Équations & Inéquation. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivant(e)s. On pourra se ramener à la forme exponentielle et trouver une équation vérifiée par X .

a) $\text{ch}(x) = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\text{ch}(x) = 3 &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 3 \\ &\iff e^x + e^{-x} = 6.\end{aligned}$$

Posons $X = e^x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\text{ch}(x) = 3 &\iff X + \frac{1}{X} = 6 \\ &\iff X^2 + 1 = 6X \\ &\iff X^2 - 6X + 1 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de cette dernière équation vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 = 32$. Les racines sont donc

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} > 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} > 0$$

Donc

$$\begin{aligned}\text{ch}(x) = 3 &\iff e^x = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad e^x = 3 + 2\sqrt{2} \\ &\iff x = \ln(3 - 2\sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(3 + 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{\ln(3 - 2\sqrt{2}), \ln(3 + 2\sqrt{2})\}$$

b) $\text{sh}(x) \geq 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$\text{sh}(x) \geq 3 \iff e^x - e^{-x} \geq 6$$

Posons $X = e^x > 0$. Alors,

$$\text{sh}(x) \geq 3 \iff X - \frac{1}{X} \geq 6 \iff X^2 - 6X - 1 \geq 0 \quad \text{car } X > 0$$

Or,

x	$-\infty$	$3-\sqrt{10}$	$3+\sqrt{10}$	$+\infty$	
$x \mapsto x^2-6x-1$	+	0	-	0	+

Donc,

$$X^2 - 6X - 1 \geq 0 \iff X \geq 3 + \sqrt{10} \quad \text{ou} \quad \cancel{X \leq 3 - \sqrt{10}}$$

car $X > 0$ et $3 - \sqrt{10} < 0$. Ainsi, en revenant à l'inconnue initiale, on a,

$$\text{sh}(x) \geq 3 \iff e^x \geq 3 + \sqrt{10} \iff x \geq \ln(3 + \sqrt{10})$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{[\ln(3 + \sqrt{10}), +\infty[}$$

c) $5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3} &\iff 5 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 4 \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \\ &\iff 5(e^x + e^{-x}) - 4(e^x - e^{-x}) = 6 \\ &\iff e^x + 9e^{-x} - 6 = 0 \\ &\iff e^{2x} - 6e^x + 9 = 0 \\ &\iff (e^x - 3)^2 = 0 \\ &\iff e^x - 3 = 0 \\ &\iff \boxed{x = \ln(3)} \end{aligned}$$

Exercice 19 – Calculs de valeurs particulières. Calculer les quantités suivantes.

a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

b) $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

c) $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

d) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

e) $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

f) $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

g) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

h) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

i) $\arcsin(\sin(4\pi)) = \arcsin(0) = 0$

Exercice 20 – Dérivation. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \arccos(2x+3)$

La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est définie sur $[-1, 1]$. Or,

$$2x+3 \in [-1, 1] \iff -1 \leq 2x+3 \leq 1 \iff -2 \leq x \leq -1$$

Ainsi, par composée la fonction $f : x \mapsto \arccos(2x+3)$ est définie sur $[-2, -1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$. On en déduit de même que la fonction f est dérivable sur $] -2, -1[$ et

$$\forall x \in] -2, -1[, \quad f'(x) = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$$

b) $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

La fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$$

c) $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ étant définie sur $[-1, 1]$, on doit commencer par chercher les valeurs de x telles que

$$-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a d'abord,

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \iff \frac{1+x}{1-x} + 1 \geq 0 \iff \frac{2}{1-x} \geq 0 \iff x \leq 1$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff \frac{2x}{1-x} \leq 0 \iff x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

en ayant fait le tableau de signe de la fraction. Ainsi,

$$-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff x \in]-\infty, 0]$$

Donc, la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est définie sur $] -\infty, 0]$. On montre de même que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et (après pas mal de calculs)

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$$

Exercice 21 – Simplifier les expressions suivantes après avoir précisé leur intervalle de définition.

a) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$

b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ en utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

c) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ grâce à la question précédente

d) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ en utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

e) On sait que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ainsi,

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \quad \text{ou} \quad \cos(\arctan(x)) = -\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

Or, $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\arctan(x)) > 0$, d'où

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

f) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 22 – Oral Mines-Ponts MP 2021. Pour quelles valeurs de α , la fonction $x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ est-elle polynomiale ?

Exercice 23 – Raisonnement par analyse-synthèse. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

On va pour cela raisonner par analyse-synthèse.

1. *Analyse.* Soit x une solution de (E). Montrer que x est une solution de $2x^2 + 3x - 1 = 0$. En déduire les valeurs possible de x .
2. *Synthèse.* Les valeurs trouvées à la question précédente sont-elles des solutions de (E) ?

Exercice 24 – Attention à l'intervalle.... On rappelle que toute fonction dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur le-dit intervalle. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? $\mathbb{R}^*$
2. Montrer que la dérivée de f est nulle sur son domaine de définition.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. En déduire une expression plus simple de f grâce au rappel. *Attention, il y a un piège...*

Attention, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle... D'après la question précédente, f' est nulle sur $]0, +\infty[$ (qui est un intervalle !) donc

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

De même, la fonction f' est nulle sur $]-\infty, 0[$ (qui est un intervalle !) donc

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 25 – Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra s'appuyer sur des arguments de parité/périodicité pour simplifier le problème).

- Tout d'abord, la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est définie sur $[-1, 1]$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est 2π -périodique car la fonction cosinus l'est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = \arccos(\cos(x + 2\pi)) = \arccos(\cos(x)) = f(x).$$

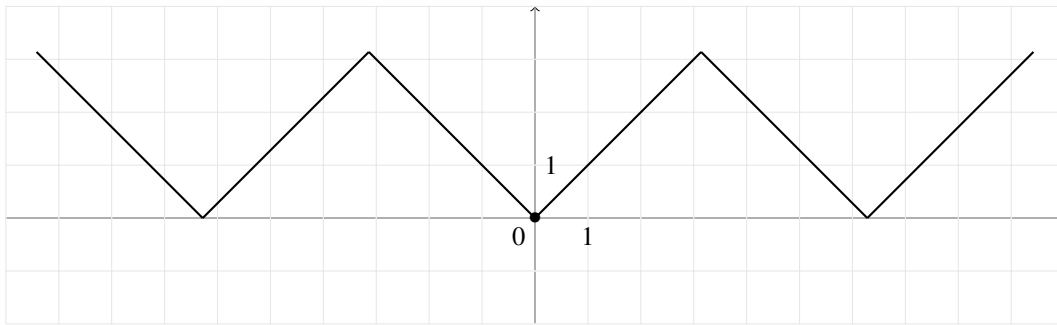
- La fonction f est paire car la fonction cosinus l'est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos(x)) = f(x).$$

- De plus, on sait que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \arccos(\cos(x)) = x$$

On en déduit ensuite son graphe sur $[-\pi, \pi]$ par parité, puis sur $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité.



Exercice 26 – Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2} \arccos(x)$$

de deux manières différentes :

1. en considérant une fonction judicieusement choisie,

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - \frac{1}{2} \arccos(x)$$

On peut montrer que f est définie, dérivable sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = f(0) = \arctan(1) - \frac{1}{2} \arccos(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = 0$$

2. par le calcul

Soit $x \in]-1, 1[$. On a,

$$\begin{aligned} \cos\left(2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right) &= 2 \cos^2\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right) - 1 && \text{car } \forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)} - 1 && \text{car } \forall a \in \dots, \cos^2(a) = \frac{1}{1 + \tan^2(a)} \\ &= \frac{2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1-x}{1+x}} - 1 \\ &= \frac{2(1+x)}{(1+x) + 1-x} - 1 \\ &= 1 + x - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Donc, en composant par arccos des deux côtés, on obtient bien,

$$2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \arccos(x)$$

Mais, attention, on vient d'utiliser le fait que

$$\arccos\left(\cos\left(2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)\right) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Ceci est vrai car

$$2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \in [0, \pi]$$

En effet, d'une part, comme la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0 \quad \text{donc} \quad \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) > \arctan(0) = 0$$

D'autre part, la fonction arctan est à valeurs dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ donc en particulier,

$$2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) < 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Exercice 27 – Soit $A = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. Montrer que $A \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.
2. Calculer $\tan(A)$.
3. En déduire que $A = \frac{3\pi}{4}$.