Interrogation du 30/09/2025

NOM Prénom :

1. Grâce au théorème de la bijection, montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$ définit une bijection de $[-1,+\infty[$ dans un ensemble J à déterminer. *On admet que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Vérifions les hypothèses du théorème de la bijection.

- L'ensemble $[-1,+\infty[$ est un intervalle.
- La fonction f est continue sur $[-1,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1,+\infty[$.
- La fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [-1,+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1\times(2x+5)-(x+3)\times 2}{(2x+5)^2} = -\frac{1}{(2x+5)^2} < 0$$

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$.

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } [-1,+\infty[\text{ vers}}$

$$\boxed{J = f([-1,+\infty[) = \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}\right]}$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = \frac{2}{3}$).

Tournez la page ➔

2. Démontrer que,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{e^{4x}+2e^{3x}+e^{2x}}{(e^x)^2} = (e^x+1)^2$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\tfrac{e^{4x}+2e^{3x}+e^{2x}}{(e^x)^2}} &= \frac{e^{4x}+2e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}} \\
&= \frac{e^{4x}}{e^{2x}} + \frac{2e^{3x}}{e^{2x}} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \\
&= e^{4x-2x} + 2e^{3x-2x} + e2x - 2x \\
&= e^{2x} + 2e^{x} + e^{0} \\
&= (e^x)^2 + 2e^x + 1 \\
&\boxed{= (e^x+1)^2}
\end{aligned}$$

3. Montrer que la quantité $A = \ln(72^3) - \ln(36^2)$ peut s'écrire sous la forme $a\ln(3)+b\ln(2)$ avec a et b deux entiers naturels à déterminer.

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{A} &= \ln(72^3) - \ln(36^2) \\
&= 3\ln(72) - 2\ln(36) \\
&= 3\ln(3^2\times 2^3) - 2\ln(2^2\times 3^2) \\
&= 3\left[\ln(3^2)+\ln(2^3)\right] - 2\left[\ln(2^2)+\ln(3^2)\right] \\
&= 3\left[2\ln(3)+3\ln(2)\right] - 2\left[2\ln(2)+2\ln(3)\right] \\
&= 6\ln(3)+9\ln(2)-4\ln(2)-4\ln(3) \\
&\boxed{= 2\ln(3)+5\ln(2)}
\end{aligned}$$